10 ශ්‍රේණිය ගණිතය **31 පාඩම**

සැකසුම - K.ජයනි චන්දිමා කරලහිංගේ මෙය

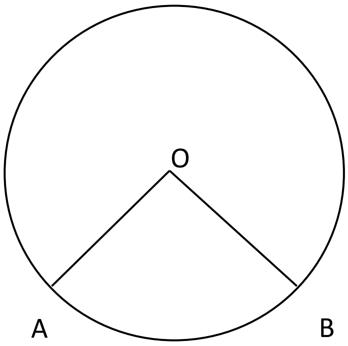
E.W.L. සෙව්වන්දි මිය

(ර/ ඇඹි/ චන්ද්‍රිකාවැව ජයන්ති මහා විද්‍යාලය)

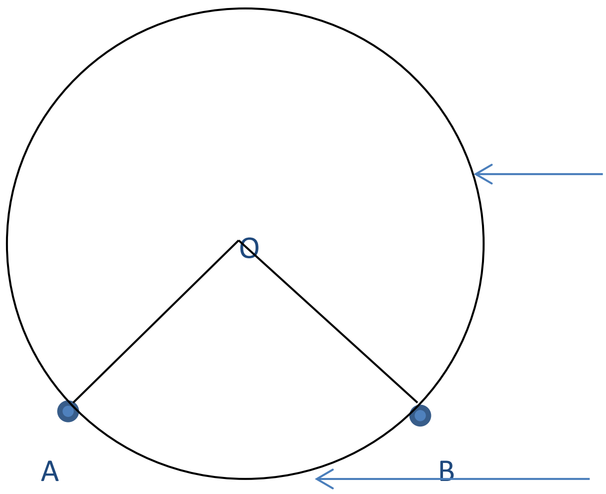
31 පාඩම - වෘත්තයක කෝණ

වෘත්තයක කෝණ

වෘත්ත චාපයකින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත සහ වෘත්තයේ පරිධිය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණ



ඉහත දැක්වෙන්නේ කේන්ද්‍රය O වන වෘත්තයකි.

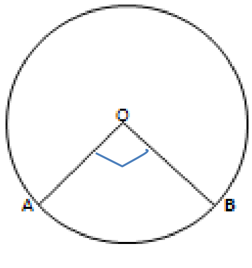


මහා චාපය (දිගින් වැඩි චාප කොටස)

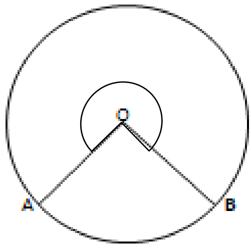
සුළු චාපය (දිගින් අඩු චාප කොටස)

A, B මගින් වෘත්තය චාප කොටස් දෙකකට බෙදේ.

a) AÔB , AB සුළු චාපය මගින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය.

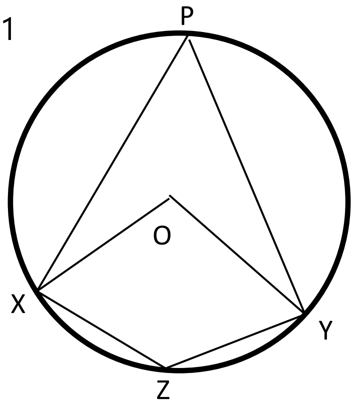


b) AÔB , AB මහා චාපය මගින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය.



මහා චාපය මගින් වෘත්තයක කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරන කෝණය සෑම විටම පරාවර්තන කෝණයකි.

නිදසුන 1



දී ඇති රූප සටහනේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.

a) XY සුළු චාපය මගින්
   1. වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණය
   2. වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය ලියා දක්වන්න

b) XY මහා චාපය මගින්
   1. වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණය

පිළිතුරු

(a)

1. XP̂Y කෝණය
2. XÔY කෝණය

(b)

1. XẐY කෝණය
2. XÔY පරාවර්තන කෝණය

පැවරුම 1

1. වෘත්තයක් ඇඳ එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කර වෘත්තය මත A,B ලක්ෂ ලකුණු කරන්න.

2. A,B ලක්ෂ මගින් සෑදෙන චාපයන් නම් කරන්න.

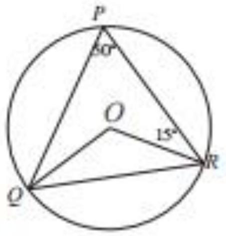
3. මහා චාපය මගින් ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණයේ ශීර්ෂය X ලෙස ද, සුළු චාපය මගින් ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණයේ ශීර්ෂය Y ලෙස ද නම් කරන්න.

චාපයකින් කේන්ද්‍රය හා වෘත්තය මත ආපාතනය කරන කෝණ අතර සම්බන්ධය

ප්‍රමේය - වෘත්ත චාපයක් මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය, එම චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ.

නිදසුන 1

රූප සටහනේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ. දී ඇති තොරතුරු ඇසුරින් $P\hat{Q}R$ සොයන්න.



$Q\hat{O}R = 2\,Q\hat{P}R$ (වෘත්තයක චාපයකින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය එම චාපයෙන් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ.)

$$\therefore Q\hat{O}R = 2 \times 50^\circ$$
$$= 100^\circ$$

$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q + Q\hat{O}R = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ තුනේ එකතුව 180° ක් නිසා)

$$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q + 100^\circ = 180^\circ$$

$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q = 80^\circ$ —— ①

$OQ = OR$ (එකම වෘත්තයේ අර සමාන වේ.)

$\therefore O\hat{Q}R = O\hat{R}Q$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා)

① ට අනුව $2\,O\hat{R}Q = 80^\circ$

$$O\hat{R}Q = \frac{80^\circ}{2}$$
$$O\hat{R}Q = 40^\circ$$
$$P\hat{R}Q = P\hat{R}O + O\hat{R}Q$$
$$P\hat{R}Q = 15^\circ + 40^\circ$$
$$P\hat{R}Q = 55^\circ$$

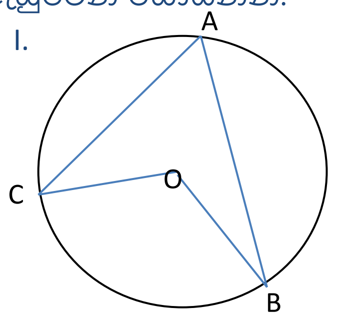
$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක කෝණ 3 එකතුව 180° නිසා)

$$P\hat{Q}R + 50^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$
$$P\hat{Q}R + 105^\circ = 180^\circ$$
$$P\hat{Q}R = 180^\circ - 105^\circ$$
$$\underline{\underline{P\hat{Q}R = 75^\circ}}$$

පැවරුම 2

1. පහත දැක්වෙන රූපවල දක්වා ඇති තොරතුරු අනුව අසා ඇති කෝණය x ඇසුරෙන් සොයන්න.

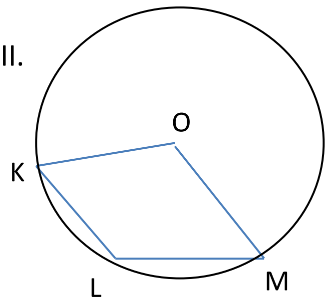
I.



$C\hat{A}B$ = x වේ.

$C\hat{O}B$ = ...

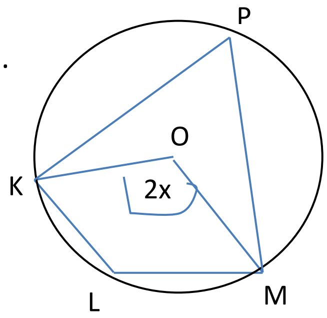
II.



$K\hat{L}M = 2x$ වේ.

$K\hat{O}M$ පරාවර්ථන කෝණය =........................

III.

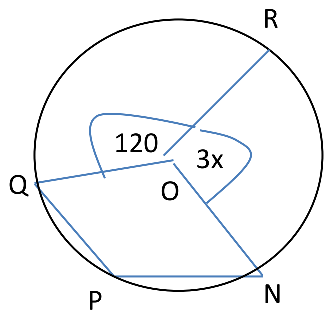


$K\hat{O}M = 2x$

$K\hat{O}M$ පරාවර්ථන කෝණය =.....................

$K\hat{L}M$ = ...

IV.

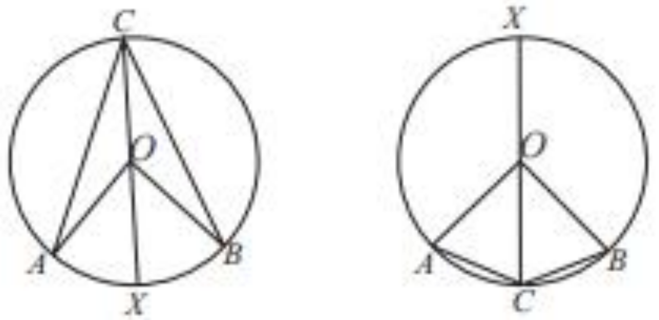


$Q\hat{O}N$ = ...

$Q\hat{P}N$ = ...

වෘත්ත චාපයක් මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය, එම චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ

යන ප්‍රමේයයේ විධිමත් සාධනය.....



දත්තය: O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත A,B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත.

සාධනය කළ යුත්ත: $A\hat{O}B = 2\,A\hat{C}B$ බව

නිර්මාණය: CO රේඛාව X දක්වා දික් කිරීම

සාධනය: $OA = OC$ (එකම වෘත්තයේ අර)

$O\hat{A}C = O\hat{C}A$ — ① (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා)

$O\hat{A}C + O\hat{C}A = X\hat{O}A$ — ② (ත්‍රිකෝණයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණ දෙකේ එකතුවට සමාන නිසා)

① සහ ② නිසා $X\hat{O}A = 2\,O\hat{C}A$ — ③

එසේම $X\hat{O}B = 2\,O\hat{C}B$ — ④

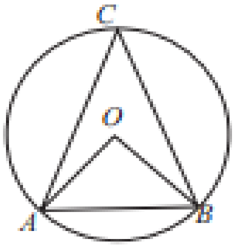
③ සහ ④ අනුව $\underline{X\hat{O}A + X\hat{O}B} = 2\,O\hat{C}A + 2\,O\hat{C}B$

$A\hat{O}B = 2\,(\underline{O\hat{C}A + O\hat{C}B})$

$\underline{\underline{A\hat{O}B = 2A\hat{C}B}}$

නිදසුන 1

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. $A\hat{C}B + A\hat{B}C = A\hat{O}B$ නම් $AC = AB$ බව පෙන්වන්න.



සාධනය:

$A\hat{C}B + A\hat{B}C = A\hat{O}B$ —— ① (දී ඇත)

$2\,A\hat{C}B = A\hat{O}B$ —— ② (වෘත්තයක චාපයක් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය එම චාපයෙන් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ.)

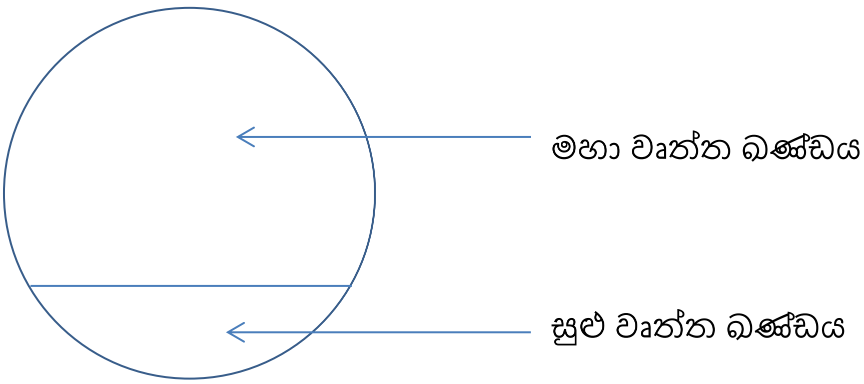
① හා ② නිසා $2\,A\hat{C}B = A\hat{C}B + A\hat{B}C$

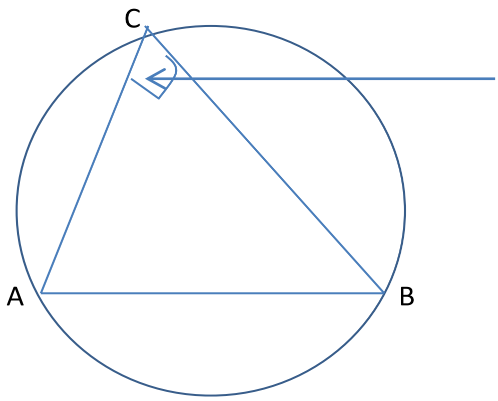
$2\,A\hat{C}B - A\hat{C}B = A\hat{B}C$

$A\hat{C}B = A\hat{B}C$

$AC = AB$ (ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක් සමාන නම් සමාන කෝණ වලට සම්මුඛ පාද සමාන වේ)

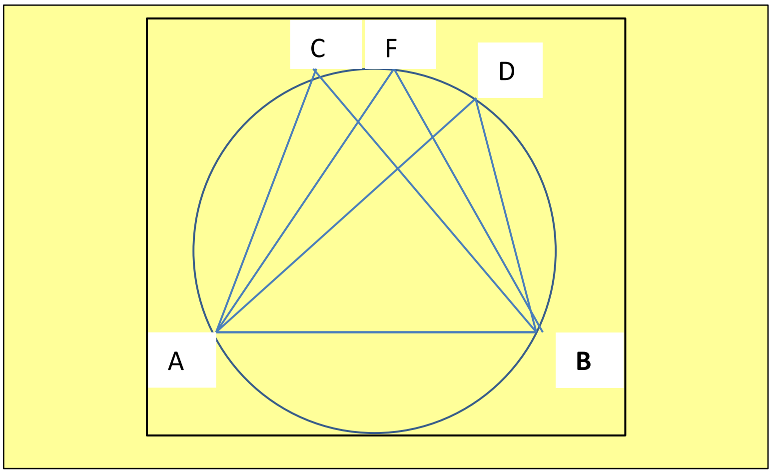
වෘත්තයක එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ අතර සම්බන්ධය





AB ජ්‍යාය මගින් මහා වෘත්ත ඛණ්ඩය මත ආපාතිත කෝණය

ප්‍රමේය - වෘත්තයක එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේ



AB ජ්‍යාය මගින් මහා වෘත්ත ඛණ්ඩය මත ආපාතිත කෝණ

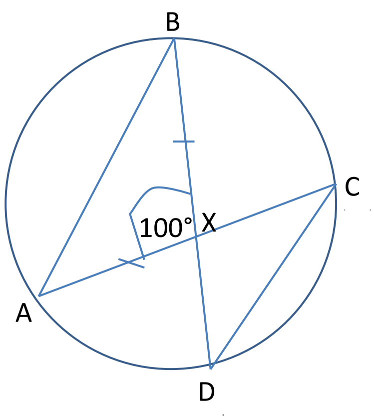
$A\hat{C}B$,$A\hat{F}B$ සහ $A\hat{D}B$ වේ.

ඒ අනුව,

$A\hat{C}B = A\hat{F}B = A\hat{D}B$

නිදසුන්

1. රූපයේ දී ඇති තොරතුරු යොදාගෙන $B\hat{D}C$ සොයන්න



$XB = XA$ නිසා XAB ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයකි.

$\therefore \quad X\hat{B}A = X\hat{A}B$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන වේ.)

ABX ත්‍රිකෝණයේ $X\hat{B}A + X\hat{A}B + A\hat{X}B = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක කෝණ 3 එකතුව 180^0 නිසා)

එනිසා $X\hat{B}A + X\hat{A}B + 100^\circ = 180^\circ$

$$X\hat{B}A + X\hat{A}B = 180^\circ - 100^\circ$$

$$X\hat{B}A + X\hat{A}B = 80^\circ$$

$$2\,X\hat{A}B = 80^\circ \;(X\hat{B}A = X\hat{A}B \text{ නිසා})$$

$$X\hat{A}B = 40^\circ$$

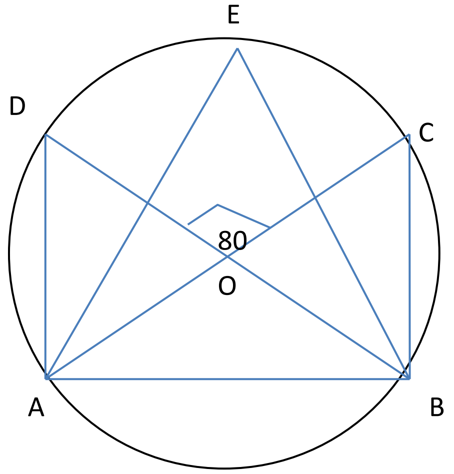
එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන නිසා

$$B\hat{D}C = X\hat{A}B$$

$$\underline{B\hat{D}C = 40^\circ}$$

පැවරුම 3

1. ආයතනයක ලාංඡනයක ආස්තරයක් පහත දැක්වේ. මෙම වෘත්තාකාර ආස්තරයේ කේන්ද්‍රය O වේ.



I. මෙහි DÔC = 80° ලෙස ගෙන ඇත. එමගින් මෙම ලාංඡනය නිර්මාණයේ දී පහත කෝණ වල අගයන් ලබා ගත යුතුය.

a) AÔB =

b) AÊB =

c) AĈB =

d) AD̂B =

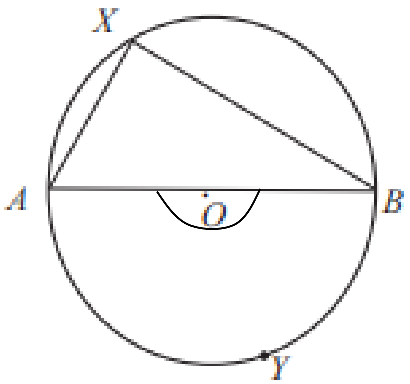
අර්ධ වෘත්තයේ කෝණ

පැවරුම 4

a) වෘත්තයක් ඇඳ කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න. කේන්ද්‍රය හරහා ජ්‍යායක් අඳින්න. එය AB ලෙස නම් කරන්න.
b) අර්ධ වෘත්තය නම් කරන්න.
c) වෘත්තය මත P නම් ලක්ෂයක් ලකුණු කර AP හා BP යා කරන්න
d) AB විශ්කම්භය මගින් පරිධිය මත ආපාතනය කරන කෝණය නම් කරන්න.
e) කෝණමානයක් භාවිතයෙන් එම කෝණය මැන ලැබෙන පිළිතුර ලියන්න.

ප්‍රමේය - අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය සෘජු කෝණයක් වේ

ජ්‍යාමිතිය සාධනයක් මගින් තහවුරු කර ගැනීම.......



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ AB විෂ්කම්භයක් වන අතර X හා Y යනු රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ.

සාධනය කළ යුත්ත: $A\hat{X}B$ සෘජුකෝණයක් බව.

සාධනය: $A\hat{O}B$ යනු AYB චාපය මගින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය වේ.

AYB අර්ධ වෘත්තයක් නිසා AOB විෂ්කම්භයක් වේ.

$A\hat{O}B =$ සෘජුකෝණ 2 ________ ①

AYB චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණය $A\hat{X}B$ වේ.

වෘත්ත චාපයක් මගින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය, එම චාපයෙන් වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වන නිසා,

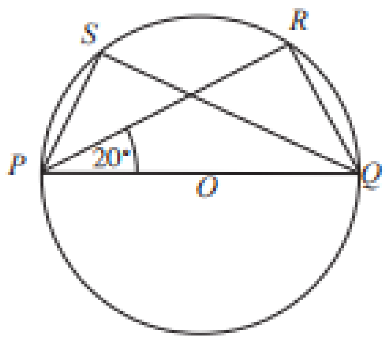
$A\hat{O}B = 2\,A\hat{X}B$ ________ ②

① සහ ② නිසා

$2\ A\hat{X}B =$ සෘජුකෝණ 2

$\therefore A\hat{X}B$ සෘජුකෝණ 1

නිදසුන



දී ඇති වෘත්තයේ PQ යනු විෂ්කම්භයකි.$R\hat{P}Q = 20^\circ$ නම් හා $SP=RQ$ නම් $R\hat{P}S$ අගය සොයන්න.

$P\hat{R}Q = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය)

$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක පාද කෝණ තුනේ එකතුව 180° නිසා)

$P\hat{Q}R + 20^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$P\hat{Q}R = 180^\circ - 110^\circ$

$P\hat{Q}R = 70^\circ$

$P\hat{S}Q = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණ)

$P\hat{R}Q = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණ)

PSQ සහ PRQ ත්‍රිකෝණ ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණ වේ.

∴ PSQ ▲ සහ PRQ ▲

SP = RQ (දී ඇත)

PQ (පොදු පාදය)

∴ PSQ ▲ ≡ PRQ ▲(කර්ණ. පා අවස්ථාව)

$S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

$S\hat{P}Q = 70^\circ$

$R\hat{P}S + Q\hat{P}R = 70^\circ$

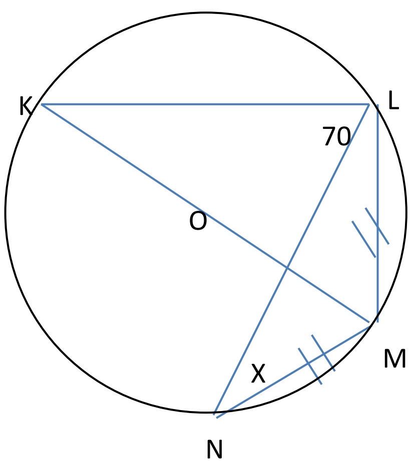
$R\hat{P}S + 20^\circ = 70^\circ$

$R\hat{P}S = 70^\circ - 20^\circ$

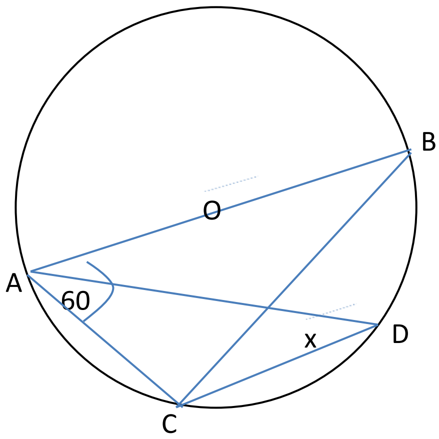
$R\hat{P}S = 50^\circ$

පැවරුම 5

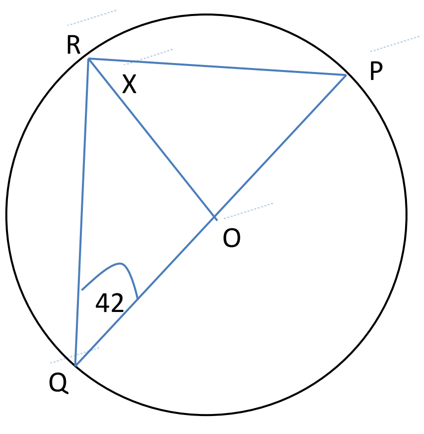
1. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.X හි අගය සොයන්න.



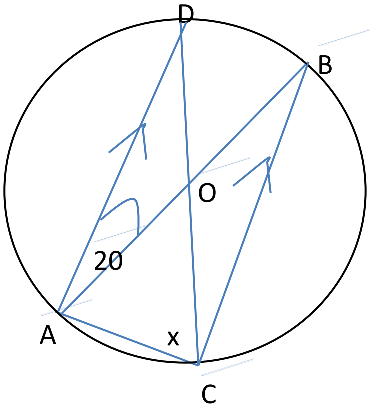
2. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.X හි අගය සොයන්න.



3. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.P,Q ,R ලක්ෂ වෘත්තය මත පිහිටා ඇත.X හි අගය සොයන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.AD // BC වේ. X හි අගය සොයන්න.



වැඩි දුර අධ්‍යනය සඳහා............

https://youtu.be/PJ1vXKZdr68
https://youtu.be/RUYS9VEALik
https://youtu.be/Bv5-WqcmFtc
https://youtu.be/3NdtNkabnW0
https://youtu.be/gW4DO7Oa6D0

Thank You !.......