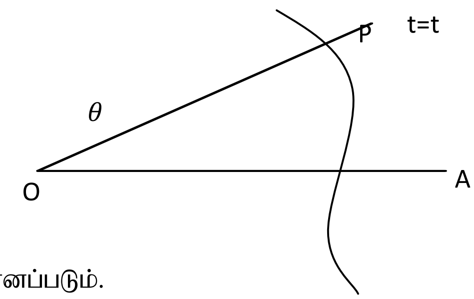
வட்ட இயக்கம்

கோண வேகம்

தளம் ஒன்றில் இயங்கும் துணிக்கை P ஒன்றைக் கருதுக. இத்தளத்தில் O நிலையான புள்ளி. OA நிலையான கோடு.

நேரம் t இல் துணிக்கையின் நிலை P என்க.

கோணம் POA இன் மாற்ற வீதம் O வைக்குறித்து நேரம் t இல் P யின் கோண வேகம் எனப்படும்.



இது $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$ எனக் குறிக்கப்படும்.

கோண வேகத்தின் அலகு $rad\ s^{-1}$ ஆகும்.

கோண ஆர்முடுகல்

கோண வேகத்தின் மாற்றவீதம், கோண ஆர்முடுகல் எனப்படும்.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

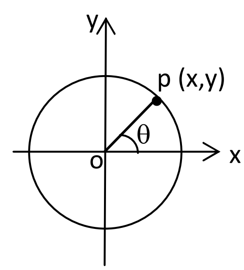
$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$ எனக் குறிக்கலாம்.

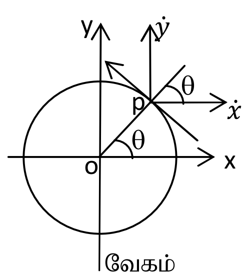
வட்ட இயக்கத்திலுள்ள துணிக்கை ஒன்றின் வேகம், ஆர்முடுகல்

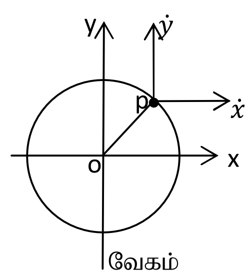
மையம் O, ஆரை = a P(x,y) என்க.

$$x = a\cos\theta$$
$$\frac{dx}{dt} = -a\,sin\theta\ \frac{d\theta}{dt}$$
$$\dot{x} = -a\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$y = a\sin\theta$$
$$\frac{dy}{dt} = a\cos\theta\ \frac{d\theta}{d\theta}$$
$$\dot{y} = a\cos\theta\,\dot{\theta}$$







↗ P யில், Op வழியேயான வேகம் = $\dot{x}\ \cos\theta + \dot{y}\sin\theta$

$$= \left(-a\ sin\theta\ \dot{\theta}\right)\cos\theta + \left(a\cos\theta\ \dot{\theta}\right)sin\theta = 0$$

↖ P யில் தொடலி வழியேயான வேகம் = $\dot{y}cos\theta - \dot{x}\ sin\theta$

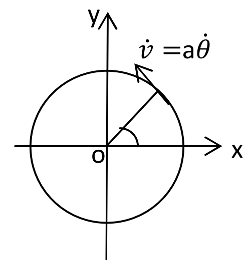
$$= \left(a\ \ cos\theta\ \dot{\theta}\right)cos\theta - \left(a\ sin\theta\ \dot{\theta}\right)\sin\theta$$

$$= a\, cos^2\theta\, \dot{\theta} + a\, sin^2\theta\, \dot{\theta}$$

$$= a\dot{\theta}(cos^2\theta + sin^2\theta) = a\dot{\theta}$$

ஆகவே வட்டத்தில் இயங்கும் துணிக்கை ஒன்றின் வேகம் எப்போதும் அப்புள்ளியில் தொடலி வழியே அமையும்.

வேகம் $u = a\dot{\theta} = a\omega$ ஆகும்.

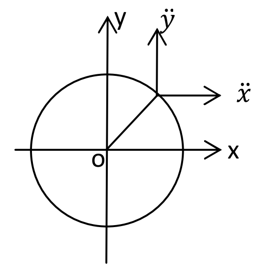


ஆர்முடுகல்

$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -a \sin\theta\, \dot{\theta}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -a\left[sin\theta - \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right) + \frac{d}{dt}(sin\theta)\dot{\theta}\right]$

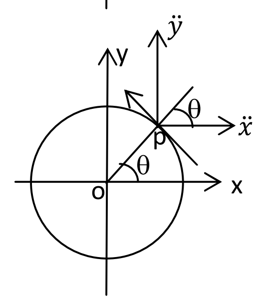
$= -a\left[sin\theta\, \ddot{\theta} + cos\theta\, \dot{\theta}^2\right]$



$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = a \cos\theta\, \dot{\theta}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = a\left[cos\theta\, \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right) + \frac{d}{dt}(cos\theta)\dot{\theta}\right]$

$= a\left[\cos\theta\, \ddot{\theta} - sin\theta\, \dot{\theta}^2\right]$



$\nearrow$ OP வழியேயான ஆர்முடுகல்

$= \ddot{x}\, cos\theta + \ddot{y}\, sin\theta$

$= \left[-a\, sin\theta\, \ddot{\theta} + a\, cos\theta\, \dot{\theta}^2\right]cos\theta + \left[a \cos\theta\, \ddot{\theta} - a\, sin\theta\, \dot{\theta}^2\right]sin\theta$

$= -a\, cos^2\theta\, \dot{\theta}^2 - a\, sin^2\theta\dot{\theta}^2$

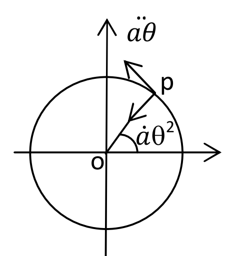
$= -a\dot{\theta}^2[cos^2\theta + sin^2\theta] = -a\dot{\theta}^2$

$\nwarrow$ தொடலி வழியேயான ஆர்முடுகல்

$\ddot{y}\, cos\theta - \ddot{x} sin\theta$

$= \left[a\, cos\theta\, \ddot{\theta} - a\, sin\theta\, \dot{\theta}^2\right]\cos\theta + \left[a \sin\theta\, \ddot{\theta} + a\, cos\theta\, \dot{\theta}^2\right]sin\theta$

$= a\ddot{\theta}(cos^2\theta + sin^2\theta) = a\ddot{\theta}$



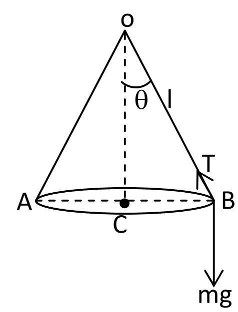
ஆர்முடுகல

ஆர்முடுகல், மையத்தை நோக்கி $a\dot{\theta}^2$ ஆகவும், தொடலி வழியே $a\,\ddot{\theta}$ ஆகவும் இருக்கும்.

குறிப்பு :- $\dot{\theta}(=\omega)$ ஒருமை எனின் $\ddot{\theta}=0$ ஆகும். எனவே ஆர்முடுகல் மையத்தை நோக்கி மட்டும் அமைந்திருக்கும். ஆர்முடுகல் மையத்தை நோக்கி $a\dot{\theta}^2 = aw^2 = \frac{v^2}{a}$ ஆகும்.

கிடை வட்டத்தில் இயக்கம்

கூம்பூசல்:- இழையொன்றின் ஒரு முனைக்கு திணிவு ஒன்று இணைக்கப்பட்டு மறுமுனை நிலையான புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளதென்க. துணிக்கை நிலையான புள்ளிக்குக் கீழே சீரான கோணவேகத்துடன் கிடை வட்டத்தில் இயங்கும்போது, இழை கூம்பொன்றின் மேற்பரப்பை ஆக்கும். இத் தொகுதி கூம்பூசல் எனப்படும்.



இழையின் நீளம் l என்க.

துணிக்கையின் இயக்கத்துக்கு, $\underline{F} = m\underline{a}$ஐப் பிரயோகிக்க,

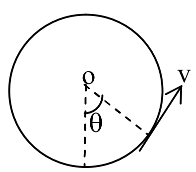
$$\uparrow \quad T\cos\theta - mg = m.o = o; \qquad T\cos\theta = mg \ \ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$\leftarrow \quad T\,sin\theta = m(lsin\theta)w^2 \qquad T = mlw^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

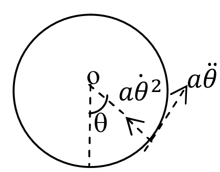
$$\frac{mg}{cos\theta} = mlw^2; \qquad cos\theta = \frac{g}{lw^2}$$

நிலைக்குத்து வட்டத்தில் இயக்கம்

மையம் :-O ஆரை :- a



வேகம்



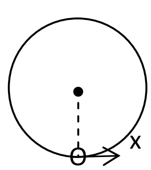
ஆர்முடுகல்

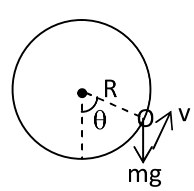
வேகம் $v = a\dot{\theta} = a\omega$ (தொடலி வழியே)

ஆர்முடுகல் : மையத்தை நோக்கி,$a\dot{\theta}^2 = a\omega^2 = \frac{v^2}{a}$

தொடலி வழியே, $a\ddot{\theta} = a\frac{d\omega}{dt} = a\dot{\omega}$

1) நிலைத்த ஒப்பமான நிலைக்குத்து வட்ட வளையம் ஒன்றில் கோர்க்கப்பட்ட மணி ஒன்றின் இயக்கம்.





துணிக்கை வளையத்தின் அதிதாழ் புள்ளியிலிருந்து கிடையாக வேகம் u உடன் எறியப்படுகிறது என்க. துணிக்கை கோணம் θ இனூடு அசைந்ததும் அதன் வேகம் V என்க. துணிக்கைக்கும் வளையத்துக்குமிடையேயான மறுதாக்கம் R, எப்போதும் இயக்க திசைக்கு செங்குத்தாகும். எனவே R இனால் செய்யப்படும் வேலை பூச்சியம். ஆகவே சக்திக்காப்பு விதிப்படி.

$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mga(1 - cos\theta)$

$v^2 = u^2 - 2ag(1 - cos\theta)$

பூரண வட்டத்திலியங்க, $\theta = \pi$ ஆக $v > o$

$\theta = \pi$ ஆக $v^2 = u^2 - 4ag > o$

$u^2 > 4ag$

2) இழையொன்றின் மூலம் தொங்கும் துணிக்கையின் இயக்கம்
3) ஒப்பமான கோளத்தின் உட்புறத்தில் துணிக்கையின் இயக்கம்.
4) ஒப்பமான கோளத்தில் வெளிப்புறத்தில் துணிக்கையின் இயக்கம்.

பயிற்சி

1. 90cm நீளமுடைய மெல்லிய நீளா இழை ஒன்றின் ஒரு முனைக்கு 5kg திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று இணைக்கப்பட்டு, கூம்பூசலாக இயங்குகிறது. துணிக்கை மாறாக் கோணவேகம் $4\,rad\,s^{-1}$ உடன் இயங்குகிறது.
   i. இழையின் இழுவை
   ii. நிலைக்குத்துடன் இழை ஆக்கும் கோணம் என்பவற்றைக் காண்க.

2. புள்ளி B, புள்ளி A யிற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே 2a தூரத்தில் உள்ளது. இழையொன்றில் m திணிவுடைய சிறிய வளையம் ஒன்று கோர்க்கப்பட்டு இழையின் முனைகள் A,B எனும் புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. வளையம் B ஐ மையமாகக் கொண்டு a ஆரையுடைய வட்டத்தில் இயங்குகிறது. வளையத்தின் கோண வேகம்.

   $\left[\frac{g}{2a}\left(\sqrt{5} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

3. 5a நீளமுடைய நீளா இழையொன்றின் முனைகள் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டில் 4a இடைத்தூரத்திலுள்ள் A,B எனுமிரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. B, A யிற்கு கீழே உள்ளது. m திணிவுடைய துணிக்கை P, இழையின் நடுப்புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டு, AP, BP ஆகிய இரு பகுதிகளும் இறுக்கமாக இருக்குமாறு, AB யின் நடுப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட ஒரு கிடை வட்டத்தில் கதி u உடன் இயங்குகிறது. இழையின்

இரு பகுதிகளிலுமுள்ள இழுவைகளைக் கண்டு இயக்கம் சாத்தியமாவதற்கு $8u^2 \geq 9\,ag$ எனக் காட்டுக.

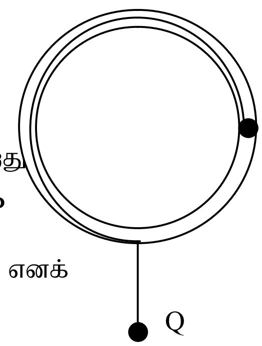
4. A,B எனுமிரு சமதுணிக்கைகள் நீளம் a ஐ உடைய நீட்ட முடியாத இலேசான இழையொன்றினாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நீளம் a ஐ உடைய வேறொரு நீட்ட முடியாத இலேசான இழையொன்றினால் நிலைத்த ஒரு புள்ளி O உடன் A இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழைகள் OA, AB என்பன எப்போதும் நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றிலிருக்க. துணிக்கைகள் கிடை வட்டங்களில் சென்று, கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் முறையே $\propto$, β எனும் கோணங்களை ஆக்குகின்றன.

i) OA, AB ஆகிய இழைகளிலுள்ள இழுவைகள் $2cos\beta : cos\propto$ எனும் விகிதத்திலுள்ளன எனவும்

ii) கோண வேகம் ω ஆனது

$\omega^2 = \frac{g\tan\beta}{a\,(\sin\propto + \sin\beta)}$ இனாலே தரப்படும் எனவும்

iii) $\sin\propto \tan\beta = (\sin\propto + \sin\beta)(2\tan\propto - \tan\beta)$ எனவும் காட்டுக.



5. படத்தில் காட்டியவாறு தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. P ,Q என்பன முறையே m,2m திணிவுடையன. θ கோணத்துாடாக P ஊடான ஆரை திரும்பியடன் Pஇன் கதி v ஆனது $\frac{2g}{3}(2\theta - \sin\theta)$ எனக் காட்டுக Pஇன் மீதான மறுதாக்கத்தைக் காண்க

6. ஒடுங்கிய ஒப்பமான குழாய் ஒன்று o வை மையமாகவும் a ஐ ஆரையாகவும் உடையது. இது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. m திணிவுடைய துணிக்கை P உம், 3m திணிவுடைய துணிக்கை Q உம் $\frac{\pi a}{2}$ நீளமுடைய இலேசான மெல்லிய நீளா இழையால் இணைக்கப்பட்டு P ஆனது O வின் மட்டத்திலும், Q குழாயின் அதிஉயர் புள்ளியிலும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது.
நேரம் t யின் பின் OP கோணம் θ வினூடு திருப்பின்,

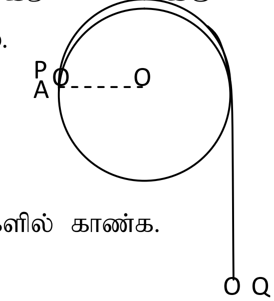
$2a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g(3 - 3\cos\theta + sin\theta)$ எனக் காட்டுக.

Pயிற்கும் குழாயிற்குமிடையேயான மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

இழையின் இழுவையைக் கண்டு $\theta = \frac{\pi}{4}$ ஆகும்போது இழை தொய்யும் எனக் காட்டுக.

7. நிலையான ஒப்பமான O வை மையமாகவும் ஆரை a யும் கொண்ட ஒப்பமான கோணம் ஒன்றின் வெளிமேற்பரப்பில் புள்ளி A இல் m திணிவுடைய துணிக்கை P உள்ளது. OA கிடையாக உள்ளது. துணிக்கை P மெல்லிய நீளா இழையொன்றின் முனைக்கு

இணைக்கப்பட்டு, இழை கோளத்தின் மேலாகச் சென்று மறுமுனையில் 2m திணிவுடைய Q எனும் துணிக்கை இணைக்கப்பட்டு, சுயாதீனமாகத் தொங்குகிறது. இழை OA யினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளது. தொகுதி இழை இறுக்கமாக இருக்க ஓய்விலிருந்து விடப்டுகிறது. நேரம் t இல் கோணம் AOP = θ ஆகும்.



P கோளத்துடன் தொடுகையில் உள்ளதெனக் கொண்டு

$3a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(2\theta - sin\theta)$ எனக் காட்டுக. இழையின் இழுவை,

P யில் கோளத்தின் மறுதாக்கம் என்பவற்றை m,g,θ இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

8. a ஆரையுடைய நிலையான ஒப்பமான கோளமொன்றின் உட்புறத்தில் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து பாரமான துணிக்கையொன்று கிடையாக u எனும் கதியுடன் எறியப்படுகிது. துணிக்கை பூரண நிலைக்குத்து வட்டத்திலியங்க u இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\sqrt{5ag}$ எனக் காட்டுக. இவ்வேகத்துடன் எறியப்பட்ட துணிக்கை ஒன்று $\frac{3\pi a}{2}$ தூரம் இயங்கிய பின் கோளத்திலுள்ள றப்பர் தாங்கி ஒன்றை அடிக்கிறது. தாங்கிக்கும் துணிக்கைக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். எறியற் புள்ளிக்கு மேலே எவ்வுயரத்தில் துணிக்கை கோளப் பரப்பை விட்டு நீங்கும் எனக் காண்க.

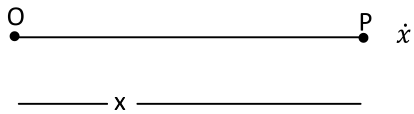
9. பாரமான துணிக்கை ஒன்று a நீளமுடைய நீட்ட முடியாத இழைக்கு இணைக்கப்பட்டு A எனும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை O விற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே ஓய்விலிருக்கும் போது, அதற்கு U எனும் பருமனுடைய கிடைவேகம் ஒன்று கொடுக்கப்படுகிறது. தொடரும் இயக்கத்தில், சிறிது நேரத்தின் பின் இழை தொய்வடைகிறது. பின்னர் மீண்டும் இழை கிடையாக இருக்கும் கணத்தில், அது இறுக்கமடைகின்றதெனின் $U^2 = ag\left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

10. m திணிவுடைய சிறிய மணி ஒன்று, நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள a ஆரையுடைய ஒப்பமான வளையமொன்றில் வழுக்கிச் செல்லுமாறு உள்ளது. இம்மணி a இயற்கை நீளமும் 4mg மீள்தன்மை மட்டுமுடைய இழை ஒன்றுக்கு இணைக்கப்பட்டு, இழையின் மறுமுனை வளையத்தின் அதியயர் புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மணியானது, இழை இறுக்கமாகவும், வளையத்தின் தாழ் புள்ளியிலிருக்குமாறும் பிடிக்கப்பட்டு மெதுவாக கிடைத் திசையில் இடம் பெயர்க்கப்படுகிறது. தொடரும் இயக்கத்தில் மணியினூடான ஆரை, கீழ்நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தை ஆக்கும் போது சக்திச் சமன்பாட்டை எழுதுக் இதிலிருந்து $cos\theta = -\frac{1}{9}$ ஆகும் போது அதிஉயர் வேகம் பெறப்படுமெனக் காட்டுக.
இழை முதலில் தொய்யும் போது மணியின் வேகத்தைக் காண்க.

எளிமை இசை இயக்கம்

ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்கும் துணிக்கையொன்றின் ஆர்முடுகலானது அந்நேர்கோட்டிலுள்ள நிலையான புள்ளியிலிருந்து அத் துணிக்கைக்கான தூரத்திற்கு நேர்விகித சமனாகவும் எப்போதும் அப்புள்ளியை நோக்கியும் இருப்பின் அத்துணிக்கையின் இயக்கம் எளிமை இசை இயக்கம் எனப்படும்.

இந்நிலையான புள்ளி இயக்கத்தின் அலைவு மையம் எனப்படும்.



வேகம் $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

ஆர்முடுகல் $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\ddot{x} = -w^2x$ இங்கு w ஒரு மாறிலி

சமன்பாட்டின் தீர்வு

$\frac{dv}{dt} = -w^2x$

$v\frac{dv}{dx} = -w^2x$

$\int v\ dv = -w^2 \int xdx + c$

$v^2 = -w^2x^2 + 2c$

x=a ஆகும் போது V=o என்க.

$v = -w^2a^2 + 2c$

$2c = w^2a^2$

$v^2 = \dot{x}^2 = w^2(a^2 - x^2)$

இங்கு a என்பது இயக்கத்தின் வீச்சமாகும்.

$v = w\sqrt{a^2 - x^2}$

$\frac{dx}{dt} = w\sqrt{a^2 - x^2}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = w\int dt + \propto$

$sin^{-1}(x/a) = wt + \propto$

$x/a = \sin wt + \propto$

$x = a\sin(wt + \propto)$

$\dot{x} = aw\ \ cos\ (wt + \propto)$

மேலும் $x = a\sin wt\cos\propto + \mathrm{acos}\, wt\ \ sin\propto$

$x = a\sin\propto\cos wt + (a\ cos\ \propto)\sin wt$

$x = A\cos wt + B\sin wt$

இங்கு A,B மாறிலிகள் (A= ain∝, B=a cos∝)

$\dot{x} = (-Aw)\sin wt + (Bw)\cos wt$

$\dot{x} = P\cos wt + \theta\sin wt$

P, Q என்பன மாறிலிகள்

$(P = -Aw, Q = -Bw)$

இடப்பெயர்ச்சிக்கான சூத்திரங்கள்

i. $x = a\sin(wt{+}\propto)$

ii. $x = A\cos wt + B\sin wt$

வேகத்திற்கான சூத்திரங்கள்

i. $\dot{x} = aw\ (\cos wt{+}\propto)$

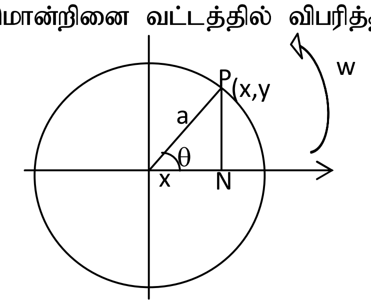
ii. $\dot{x} = P\ coswt + Q\sin wt$ இங்கு $P = -Aw, \qquad Q = Bw$

இங்கு a,w,∝,A,B,P,Q என்பன மாறிலிகள்.

$a = \sqrt{A^2 + B^2}$ ஆகும்.

எளிமை இசை இயக்கம் ஒன்றிற்கான அலைவு காலம் $T = \frac{2\pi}{w}$

எளிமை இயக்கமொன்றினை வட்டத்தில் விபரித்தல்



P என்ற துணிக்கை மாறாக் கோண வேகம் w உடன் வட்டமொன்றில் இயங்குகின்றது.

$\theta = wt$

P இலிருந்து x அச்சிற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடி N எனின் P வட்ட இயக்கத்தை வரையும் போது N ஆனது x – அச்சில் ஒரு எளிமை இசை இயக்கத்தை ஆற்றும்.

$ON = x = a\cos\theta = a\cos wt$

$\dot{x} = -aw\sin wt$

$\ddot{x} = -aw^2 \cos wt = -w^2(a \cos wt)$

$\ddot{x} = -w^2 x$

N இன் இயக்கம் எளிமை இசை இயக்கமாகும். P ஒரு பூரண வட்டத்தை ஆக்கும்போது N ஒரு பூரண அலைவை ஆக்கும்.

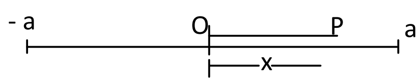
$\theta = wt$

$\theta = 2\pi$ போது $t = T$ (அலைவு காலம்)

$2\pi = w.T$

$T = \frac{2\pi}{w}$

வேகம், ஆர்முடுகல் என்பவற்றின் அதியுயர் பெறுமதி



$\ddot{x} = -w^2 x, v^2 = \dot{x}^2 = w^2(a^2 - x^2)$

வேகம் $x = \pm a$ இல் $v = o$

$x = o$ போது $v = \pm aw$

$|v| = aw$ இது வேகத்தின் அதியுயர் பெறுமதியாகும்.

ஆர்முடுகல் $x = a$ போது $|\ddot{x}| = aw^2$

$x = a$ போது ஆர்முடுகல் அதியுயர் பெறுமதியைக் கொண்டிருக்கும்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. O என்ற புள்ளியிலிருந்து t நேரத்தில் P என்ற துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி x ஆனது பின்வருமாறு தரப்படுகின்றது.
   $x = 3 \sin 2t + 4 \cos 2t$ துணிக்கையின் வேகம், ஆர்முடுகல் என்பனவற்றிற்கான கோவைகளைப் பெறுக. துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $\frac{d^2x}{dt^2}$ ஆனது $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x$ என்ற சமன்பாட்டினை திருப்தியாக்குகின்றது எனக் காட்டி k இன் பெறுமதியைக் கணிக்க.

2. l இயற்கை நீளமும் λ மீள்தன்மை மட்டுமே கொண்ட இழையின் ஒரு முனையானது ஒப்பமான கிடைத்தரையிலுள்ள x என்ற புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. m திணிவு கொண்ட ஒரு துணிக்கையானது இழையின் மறுமுனைக்கு இணைக்கப்பட்டு x இலிருந்து $\frac{3l}{2}$ தூரத்திலுள்ள புள்ளி o இல் இருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில்

துணிக்கையின் இயக்கம் எளிமை o இலிருந்து l தூரத்தில் உள்ள போது அதன் வேகத்தையும் காண்க.

3. m திணிவுள்ள துணிக்கை P யானது 2l இயற்கை நீளமும் 3mg மீள்தன்மை மட்டும் உடைய ஒரு இழையின் ஒரு முனைக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மறுமுனையானது சீலிங்கிலுள்ள நிலையான புள்ளி A யிற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கையானது சமநிலையில் தொங்குகின்றது.
   1. இழையின் நீளம் யாது?
   2. $AP = \frac{7l}{3}$ ஆகுமாறு துணிக்கை P யானது இழை தொடர்ந்து நிலைக்குத்து நிலையில் இருக்கத்தக்கவாறு இழுக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது தொடரும் இயக்கம் எளிமை இசை இயக்கம் என நிறுவுக.
   3. அலைவு காலம் யாது?
   4. P யானது அதன் சமநிலைத்தானத்தினூடு செல்லும்போது அதன் வேகம் யாது?

4. l இயற்கை நீளம் கொண்ட மீள்தன்மை இழையொன்றின் ஒரு முனை ஒரு நிலையானபுள்ளி o இற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மறுமுனை m திணிவுள்ள துணிக்கைகு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை சமநிலையில் தொங்கும் போது அதன் நீளம் $\frac{3l}{2}$
   1. துணிக்கையானது அதன் சமநிலைத்தானத்தில் இருந்து நிலைக்குத்தாக கீழே இழையின் நீளம் $\frac{7l}{4}$ ஆகுமாறு இழுக்கப்பட்டு விடுவிக்கப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் அலைவு காலம், வீச்சம் என்பவற்றைக் காண்க?
   2. துணிக்கையானது o இற்கு கீழே $OA = {}^{9l}/_{4}$ தூரத்தில் ஓய்வில் இருந்து விடுவிக்கப்படும் எனின், இழை தொய்ய எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{{}^{l}/_{2g}}\,[\pi - cos^{-1}({}^{2}/_{3})]$ எனக் காட்டுக.

5. இயற்கை நீளம் a உம் மீள்தன்மை மட்டு λ உம் கொண்ட மீள்தன்மை இழையொன்றின் ஒரு முனையில் m திணிவுள்ள துணிக்கையொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளதுடன் மற்றைய முனை நிலைத்த ஒரு புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கையானது O இல் பிடிக்கப்பட்டு விடப்படின் தொடரும் இயக்க ஒரு எளிமை இசை இயக்கம் எனக் காட்டுக. துணிக்கையானது o இலிருந்து U என்ற வேகத்துடன் எறியப்படும் போது இழை அடையும் உயர்நீளம் 2a எனின் U ஐக் காண்க. மேலும் அலைவு காலம் $2\sqrt{\frac{ma}{\lambda}}\,[\pi + 2]$ எனவும் நிறுவுக.

6. இயற்கை நீளம் l ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு λ ஐயும் உடைய இலேசான இழை ஒன்றின் ஒரு நுனியானது m திணிவுடைய P என்னும் ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்க,

அதன் மறுநுனியானது o என்னும் ஒருபுள்ளியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. l நீளமுள்ள இலேசான நீளா இழையொன்றின் ஒரு நுனியானது m திணிவையே கொண்ட Q என்னும் ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்க அதன் மறுமுனையானது P யுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. P யானது OQ இன் நடுப்புள்ளியாக அமையுமாறு OPQ என்பது நிலைக்குத்தான ஒரு நேர்கோட்டிலும் OP இயற்கை நீளம் l ஆகவும் இருக்க தொடக்கத்தில் ஓய்வில் பிடிக்கப்பட்டிருக்கும் தொகுதியானது ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. நேரம் t யில் OP யின் நீளம் l+x ஆகும். P,Q ஆகிய துணிக்கைகளுக்கான இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதி இதிலிருந்து $\ddot{x}+w^2\left(x-\frac{g}{w^2}\right)=0$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $w^2=\frac{\lambda}{2ml}$

$x=\frac{g}{w^2}+A\cos wt+B\sin wt$ என்பது நேரம் t இலே துணிக்கை P யின் அமைவைக் கொடுக்கின்றவாறு A,B யின் மாறிலிகளை பெறுமானத்தைத் துணிக.

இதிலிருந்து

i. அடுத்து நிகழும் இயக்கத்திலே இழை OP யின் நீளம் ஒருபோதும் l இலும் பார்க்க குறைவாக இருக்காது எனவும்

ii. இழை PQ இலுள்ள இழுவை $2mg\,sin^2\frac{wt}{2}$ எனக் காட்டுக.

iii. மீள்தன்மை இழையின் உயர்நீட்சி 2l எனின் λ இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, மேலும் உயர் நீட்சி முதன்முறையாக எய்தப்படுவது $\pi\sqrt{l/g}$ என்னும் நேரத்தில் எனவும் காட்டுக.

7. l இயற்கை நீளமும் λ மீள்தன்மையும் கொண்ட மீள்தன்மை இழையொன்று A,B என்னும் இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கிடையில் ஈர்க்கப்பட்டுள்ளது. A,B யிற்கிடையில் துணிக்கை C என்னும் புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. AC:CB $=l_1:l_2$ ஆகும். துணிக்கை P யானது B யின் பக்கமாக x என்ற தூரம் இழுக்கப்பட்டு விடுவிக்கப்படின் P யின் அலைவு ஒரு எளிமை இசை இயக்கம் எனக் காட்டி அலைவு காலம் T எனின் $T=\frac{2\pi}{(l_1,l_2)}\sqrt{\frac{l_1,l_2,l}{\lambda}}$ எனக் காட்டுக.

8. இயற்கை நீளம் l ஐயும், மீள்தன்மை மட்டு λ ஐயும் உடைய மீள்தன்மை இழையொன்றை ஈர்க்கும் போது சேமிக்கப்படும் அழுத்தச் சக்தி $1/2\frac{\lambda}{l}e^2$ எனக் காட்டுக.

இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய மீள்தன்மை இழையொன்றின் நுனிகளில் ஒன்று பாவுபலகை (சீலிங்) யில் உள்ள நிலைத்த புள்ளி O உடனும் மற்றையநுனி திணிவு m ஐ உடைய துணிக்கையொன்றுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கையானது O விலே ஓய்வில் வைத்திருக்கப்பட்டு பின்னர் விடுவிக்கப்படுகின்றது. இழையின் உயர் நீட்சி 2l ஆகுமெனக் காணப்படுகின்றது. இழையின் மீன்தன்மை மட்டு $\frac{3mg}{2}$ எனக் காட்டுக. மேலும் துணிக்கையானது O இற்கு திரும்பிவர எடுக்கும் நேரம் $2\sqrt{\frac{2l}{g}}\left[1+\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right]$ எனவும் காட்டுக.

9. இயற்கை நீளம் l ஆகவுள்ள AB என்னும் மீள்தன்மை இழையொன்றின் ஒரு முனை Δ, புள்ளியொன்றுடன் இணைக்கப்பட்டு மறுமுனை B யில் w என்ற நிறை தொங்கவிடப்பட்ட போது இழையின் நீளம் இருமடங்கானது. B யிலுள்ள நிறை அகற்றப்பட்டு பின்னர் $\frac{w}{10}$ என்ற நிறை B யில் இணைக்கப்பட்டு அது A யில் இருந்து விழவிடப்படுகின்றது. அது எவ்வளவு தூரம் கீழே விழும் எனக் காண்க. பின்னர் நிகழும் இயக்கத்தில் அலைவு காலம் $2\sqrt{\frac{l}{10g}}\left[2\sqrt{5}+\pi-cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}l}\right)\right]$ எனக் காட்டுக.

10. இயற்கை நீளம் (a+b) உம் மீள்தன்மை மட்டு λ உம் கொண்ட AB என்னும் மீள்தன்மை இழையொன்றின் இரு முனைகளும் ஒப்பமான மேசையொன்றின் மீது ஒன்றுக்கொன்று (a+b) தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. m திணிவுள்ள துணிக்கையொன்று இழையிலுள்ள P என்னும் புள்ளியொன்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை ஓய்வில் இருக்கும் போது AP=a, BP = b உம் ஆகும். துணிக்கையானது AG=a+c ஆகவுள்ள புள்ளி G இல் பிடிக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடப்படுகின்றது. $(o<c<b)$ $\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ நேரத்தில் துணிக்கை $\frac{2c}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ என்ற மொத்தத் தூரத்தை சென்று மீண்டும் G யிற்கு திரும்பும் எனக் காட்டுக.

தாயங்களும் துணிகோவைகளும்

1) a) $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

தாயம் AB ஓராயச் சமச்சீர் ஆகுமாறு x,y இனைக் காண்க?

b) $x + 2y + 3z = 2$

$-2y + z = 4$

$2y + z = 8$

என்னும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியை AX = B என எடுத்துரைக்குமாறு தாயம் A யினைக் காண்க.

இங்கு

$X^T = (x, y, z)$

$B^T = (2,4,8)$

I என்பது 3 x 3 சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாயிருக்க $A^3 - 5A + 4I = 0$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து CA = I ஆகுமாறு தாயம் C யினைக் காண்க. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வை உய்த்தறிக.

2) a) $A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{pmatrix}$ என்க.

det (A) = (a + b + c $)^3$ எனக் காட்டுக.

b) $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ எனின் $\det(S - \lambda I) = 0$ ஆகுமாறு λ இற்கான $\lambda_1 \lambda_2$ என்னும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3) 3ம் வரிசைத் தாயங்களான A,B என்னும் சதுரத்தாயகளுக்கு $(AB)^T = B^T A^T$ எனக் காட்டுக.

$C = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்க.

$CD = DC = I$ என்பததை வாய்ப்புப் பார்க்க. இங்கு I இன் வரிசை 3 x 3

$6x - 3y - 2z = 3$

$-3x + 2y + z = 2$

$-2x + y + z = 1$ என்னும் சமன்பாட்டுத்தொகுதியை AX = H என எடுத்துரைக்க.

இங்கு,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ A துணிய வேண்டிய தாயமாகும்.

$CC^T = A$ ஆக இருக்குமாறு a,b,c யினைக் கண்டு BA=I ஆகுமாறு ஒரு தாயம் B யைப் பெறுக. இதிலிருந்து தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுதியைத் தீர்க்க.

4) a,b என்பன மாறிலியாகவும் $a \neq b$ ஆகவும் இருக்கும்.

$\begin{vmatrix} a^2 & 1-a^2 & 1+a^3 \\ b^2 & 1-b^2 & 1+b^3 \\ x^2 & 1-x^2 & 1+x^3 \end{vmatrix} = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$a = -b$ எனின் சமன்பாட்டின் படி யாது?

5) $x = a, x + y = b, -x + y + z = c$ என்னும் சமன்பாடுகளை AX=B வடிவில் எழுதும் போது கிடைக்கும் தாயம் A யினைக் காண்க.

இங்கு $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ஆகும்.

x,y,z இற்கு *a,b,c* சார்பில் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் தாயம் A^{-1} ஐ எழுதுக.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ எனின் CC^T இனைக் காண்க.

இதிலிருந்து $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ஆகும் போது சமன்பாடு $AC^T \times = D$ யினைத் தீர்க்க.

$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ எனின் சமன்பாடு $AC^T \times = D$ யிற்கு ஒரு தனித்தீர்வு எதுவும் உண்டா? உமது விடையை மெய்ப்பிக்க.

6) (a) x = 0 என்பது சமன்பாடு $\begin{vmatrix} 4 & -1 & x-1 \\ x+2 & 1 & 1 \\ 4 & x-4 & 2x-4 \end{vmatrix} = 0$ இன் ஒரு தீர்வு என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க மேலும் மற்றைய எல்லாத் தீர்வையும் காண்க?

7) a) தாயம் $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ A ஆல் குறிக்கப்படுகின்றது. $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$ ஆகுமாறு λ, μ இனைக் காண்க. (I – அலகுத்தாயம், 0 – பூச்சியத்தாயம்) இதிலிருந்து A^3, A^{-1} இனைத் துணிக.

b) தாயம் $\begin{pmatrix} x+9 & t & u \\ b & y+b & v \\ c & a & z+c \end{pmatrix}$ ஓராயச் சமச்சீர்த்தாயமாகுமாறு.

x,y,z,t,u,v இன் பெறுமானங்களை a,b,c யில்க் காண்க. இவ்வாறு பெறப்பட்ட தாயம் A எனின் துணிகோவை A யினை விரித்து எழுதாமல் A தனிச் சிறப்புத் தாயமெனக் காட்டுக.

8) a) தாயம் $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ ஆகும். det(A) யினைக் காரணிப்படுத்துக.

இதிலிருந்து $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$ எனின் det(B) யின் காரணிகளைப் பெறுக.

b) தாயம் $A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$ என்க.

i) A^2, A^{-1} இனைக் காண்க.

ii) $A^{49} \times = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ஆகுமாறு 2 x 2 தாயம் x இணைக் காண்க.

c) துணிகோவை $\begin{vmatrix} x^2+18 & x & -x \\ -x & x^2+18 & x \\ x & -x & x^2+18 \end{vmatrix}$ இனை x இனாலான 3 இருபடிக் காரணிகளின் பெருக்கமாகத் தருக.

9) a) $\begin{vmatrix} (x+1)(x+2) & (x+2) & 1 \\ (x+2)(x+3) & (x+3) & 1 \\ (x+3)(x+4) & (x+4) & 1 \end{vmatrix} = -2$ எனக் காட்டுக.

b) $\begin{vmatrix} a & a^2 & (1+a^3) \\ b & b^2 & (1+b^3) \\ c & c^2 & (1+c^3) \end{vmatrix}$ இனைக் காரணிப்படுத்துக.

10) a) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ எனின் $(X^{-1})^T = (X^T)^{-1}$ எனக் காட்டுக.

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & Z & Z^2 \end{vmatrix}$ என்பதன் ஒரு காரணி (x – y) எனக் காட்டி முற்றாகக் காரணிப்படுத்துக.

c) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $(a-\lambda)x + by + cz = 0$

$bx + (c-\lambda)y + az = 0$

$$cx + ay + (b-\lambda)z = 0$$

இற்கு தீர்விருக்குமாறு λ ஆனது 3 பெறுமானத்தை எடுக்குமெனவும் அப் பெறுமானங்களின் பெருக்கம் Δ எனவும் காட்டுக.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ எனின் $A^3 - A = A^2 - I$ எனக் காட்டுக.

11) a) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ஒரு நேர்கோட்டுப் புள்ளிகள் எனின்

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$ எனக் காட்டுக. (Δ யின் பரப்புக் காணலைப் பயன்படுத்தலாம்).

b) $\begin{vmatrix} 1 + Sin^2\theta & Cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ Sin^2\theta & 1 + Cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ Sin^2\theta & Cos^2\theta & 1 + 4\sin 2\theta \end{vmatrix} = 0$ எனின் θ இற்கான தீர்வைக் காண்க.

12) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ எனின்

i) $A^3 - A = A^2 - I$ எனக் காட்டுக.

ii) $A^n - A^{n-2} = A^2 - I$ எனக் காட்டுக. (இங்கு $n \geq 3$)

iii) (i) இலுள்ள முடிவைப் பயன்படுத்தி A^{-1} ஐக் காண்க.

b) $x = 2,\ x + 2y + z = -1,\ 2x + 3y + 2z = -3$ இச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியை AX=B என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்க.

இங்கு $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ஆகும். A யினைக் கண்டு சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

13) a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ எனின் $(BA)^T = A^T B^T$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

b) $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} & 0 \\ \frac{36}{65} & \frac{48}{65} & \frac{-25}{65} \end{pmatrix}$ எனின் $BB^T = I$ எனக் காட்டுக.

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ இனை 2 சமச்சீர்த் தாயங்களின் கூட்டுத்தொகை ஆகவும், 2 ஓராயச் சமச்சீர் தாயங்களின் கூட்டுத்தொகையாவும் தருக.

14) a) $C = \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix}$ எனின் det(C) யின் பெறுமானம்.

$|c| = (1 + a^2 + b^2 + c^2)$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

b) $B = \begin{pmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{pmatrix}$ ஆயின் det(B)=0 ஆயின் x தீர்வுகள் யாவை?

15) a) தாயம் B என்பது 3x3 வரிசையிலுள்ள சதுரத்தாயமாகும்.

$B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ எனின்

i) $\frac{1}{2}(B + B^T)$

ii) $\frac{1}{2}(B - B^T)$ இனைக் காண்க.

இதிலிருந்து தாயம் B யினை சமச்சீர்த் தாயமொன்றினதும், ஓராய சமச்சீர்த்தாயமொன்றினதும் கூட்டுத்தொகையாக எழுதலாமெனக் காட்டுக?

b) $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{pmatrix}$ ஆயின் $\det(A) = a_1 a_2 a_3 \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)$

எனக் காட்டுக.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ஆயின் A^{-1} இனைக் காண்க.

இதிலிருந்து $A + aA^{-1} = bI$ இலிருந்து a,b ஆகிய மெய் மாறிலிகளைக் காண்க.

16) a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனின் AB=BA=I ஆகுமாறு தாயம் B யினைக் காண்க.

$3x+4y=5$
$x+2y=2$ இனை மேற்கூறப்பட்ட முடிவிலிருந்து தீர்க்க.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ எனின் $P^T, \frac{P+P^T}{2}$ என்பவற்றைக் காண்க.

17) a) $a > 0, b > 0, c > 0$ ஆகவும், a, b, c என்பன பெருக்கல் விருத்தியொன்றின் lம், mம், nம் உறுப்புக்களாகவுமிருப்பின்.

$\begin{vmatrix} lna & l & 1 \\ lab & m & 1 \\ lnc & n & 1 \end{vmatrix} = 0$ எனக் காட்டுக.

b)
$$\begin{aligned} 2x - 5y + 2z &= 7 \\ x + 2y - 4z &= 3 \\ 3x - 4y - 6z &= 5 \end{aligned}$$

ஆகிய சமன்பாட்டுத் தொகுதியை AX=B ஆகுமாறு தாயம் A யினைக் காண்க.

இங்கு $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ஆகும்.

இதிலிருந்து A^{-1} இனைக் காண்க.

சமன்பாட்டுத் தொகுதியைத் தீர்க்க.

c) $\begin{vmatrix} Cos(x+y) & Sin(x+y) & -Cos(x+y) \\ Sin(x-y) & Cos(x-y) & Sin(x-y) \\ Sin2x & 0 & Sin2y \end{vmatrix} = Sin2(x+y)$ எனக் காட்டுக.

18) a) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ என்க. இங்கு $i = \sqrt{-1}$

A^2, A^4 இனைக் காண்க.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ எனின்

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ எனக் காட்டுக.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Cos^2\alpha & Cos^4\alpha & Sec^2\alpha \\ Sin^2\alpha & Sin^4\alpha & tan^2\alpha \end{vmatrix} = 2Sin^4\alpha\, Cos^2\alpha$ எனக் காட்டுக.

19) $A = \begin{pmatrix} Cos\frac{\pi}{n} & -Sin\frac{\pi}{n} \\ Sin\frac{\pi}{n} & Cos\frac{\pi}{n} \end{pmatrix}$ என்க. $(n > 0)$

$A^{2n} = I$ எனக் காட்டுக.

20) துணிகோவையின் இயல்புகளைப் பயன்படுத்தி

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Cos\theta & Sin\theta & 1 \\ Cos^2\theta & Sin^2\theta & 1 \end{vmatrix} = (1 - Cos\theta)(1 - Sin\theta)(Sin\theta - Cos\theta)$ எனக் காட்டுக.

b) $\begin{matrix} kx + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 1 \end{matrix}$ இனை தாயவடிவில் தருக. (K – மெய் மாறிலி)

இதிலிருந்து தொகுதி ஒரு தனித் தீர்வைக் கொண்டிருக்கும் k யின் பெறுமானங்கள் யாவை?

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ என்க.

i) $A^T, B^T, AB, B^T A^T$ இனைக் காண்க.

ii) $(AB)^T = B^T A^T$ இனை வாய்ப்புப் பார்க்க.

21) a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்க. $A^2 - 3A + 2I = 0$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து A^{-1} ஐக் காண்க.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -9 & 5 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்க.

BA யினைக் காண்க.

இதிலிருந்து $x - y + z = 2$

$x - 2y + 3f = 2$

$2x + y - 3z = 2$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதியைத் தீர்க்க.

22) a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ எனின் $P^T P,\ PP^T$ இனைக் காண்க?

P யின் நேர்மாறு P^{-1} ஐ உய்த்தறிக.

P^{-1} ஐப் பயன்படுத்தி $(P^T)^{-1}$ ஐக் காண்க.

(வேறு ஏதாவது பயன்படுத்தப்படின் அதனைத் தெளிவாகக் குறிப்பிடுக)

b) $PBP^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ஆகுமாறு மூலைவிட்டத் தாயம் B யினைக் காண்க.

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ என்க. $A = 2I + 2PBP^{-1}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $P^{-1}AP$ ஒரு மூலைவிட்டத் தாயமெனக் காட்டுக.

23) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^3 & x^6 \end{vmatrix}$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

நிகழ்தகவு

வரைவிலக்கணம்

E – எழுமாற்றுப் பரிசோதனை Ω மாதிரிவெளி

ε - நிகழ்ச்சி வெளி

சார்பு $P : \varepsilon \longrightarrow (0,\ 1)$ எனும் சார்பு பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருத்தி செய்யும்

i. $P(A) \geq 0 \qquad A \in \varepsilon$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. A_1, A_2 என்பன தம் முன் புறநீங்கும் நிகழ்ச்சிகளின்

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2): \qquad A_1, A_2 \epsilon\ \varepsilon$

தோற்றம்

1. $P(\phi) = 0$
2. $P(A^1) = 1 - P(A)$ (A^1, A யின் நிரப்பு நிகழ்ச்சி)
3. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^1)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $A \subset B$ எனின் $P(A) \leq P(B)$

நிபந்தனை நிகழ்தகவு

வரைவிலக்கணம்

E – எழுமாற்றுப் பரிசோதனை Ω - மாதிரி வெளி

நிகழ்ச்சிகள் A, B $P(A) > 0$

நிகழ்ச்சி A நடை பெற்றது எனத் தரப்பட்டபோது

நிகழ்ச்சி B நடை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(B/A)$ எனக் குறிப்பிக்கப்படும்.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

வரைவிலக்கணத்திலிருந்து பெருக்கல் தேற்றம் $P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A)$ ஆகும்.

தோற்றம்

$P(A) > 0$ என்க

1. $P(\phi/A) = 0$
2. $P(B^1/A) = 1 - P(B/A)$ ($B^1 - B$ யின் நிரப்பி)
3. $P(B_1/A) = P(B_1 \cap B_2/A) + P(B_1 \cap {B_2}^1/A)$

சாரா நிகழ்ச்சிகள்

வரைவிலக்கணம்

E – பரிசோதனை Ω மாதிரிவெளி ε- நிகழ்ச்சிவெளி A, B, $\in \varepsilon$

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ எனின் A,B சாராநிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்

A, B, C $\in \varepsilon$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, $P(C \cap A) = P(C)P(A)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$ எனின் A,B,C சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

தோற்றம்

A,B சாரா நிகழ்ச்சிகளெனின்

(i) A, B^1 சாராதவை

(ii) A^1, B சாராதவை

(iii) A^1, B^1 சாராதவை

மாதிரி வெளியின் பிரிப்பு

வரைவிலக்கணம்

$B_1, B_2,$ …………. Bn என்பன நிகழ்ச்சி வெளியிலுள்ள நிகழ்ச்சிகள் என்க.

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

(ii) $B_i \cap B_j = \phi \quad (i \neq j)$ எனின் $\{ B_1, B_2, \ldots.. B_n\}$ என்பது Ω இன் ஒரு பிரிப்பு எனப்படும்

மொத்த நிகழ்தகவுத் தேற்றம்

$\{ B_1, B_2, \ldots\ldots.. B_n\}$ என்பது மாதிரிவெளி Ω இன் ஒரு பிரிப்பு என்க.

$P(B_i) > 0$ ஆகவும் A ஒரு நிகழ்ச்சியுமாக இருக்க

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/Bi)\, P(B_i)$ ஆகும்.

பேயிசின் தேற்றம்

$\{ B_1, B_2, \ldots\ldots.B_n \}$ என்பது ஒரு பிரிப்பு என்க.

A ஒரு நிகழ்ச்சி

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j)\, P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)\, P(B_i)}$$

1. சோதனை ஒன்றில் 15% மாணவர்கள் கணிதத்திலோ அல்லது தமிழிலோ சித்தியடையவில்லை. 73% மாணவர்கள் தமிழிலும், 49% மாணவர்கள் கணிதத்திலும் சித்தி பெற்றுள்ளனர். மாணவன் ஒருவன் எழுமாற்றாகத் தெரியப்படின் அவன்

   a. கணிதம் அல்லது தமிழில் சித்தியடைந்திருப்பதற்கு
   b. இரண்டு பாடங்களிலும் சித்தியடைந்திருப்பதற்கு,
   c. தமிழில் மட்டும் சித்தியடைந்திருப்பதற்கு நிகழ்தகவு யாது?

2. இரு கோடாத தாயக்கட்டைகள் ஒருங்கே எறியப்படுகின்றன.
   a. குறைந்தது ஒரு "6" ஐப் பெறுவதற்கு,
   b. குறைந்தது ஒரு "6" அல்லது ஒரு "3" ஐப் பெறுவதற்கு, நிகழ்தகவைக் காண்க.

3. A,B எனுமிருவர் விளையாட்டு ஒன்றில் ஈடுபடுகின்றார்கள் தாயக்கட்டை ஒன்று எறியப்பட்டு முதலில் "4" ஐப் பெறுபவர் வெற்றி பெற்றவராகக் கருதப்படுவார். A, B இருவரும் ஒருவர் மாறி ஒருவர் தாயக் கட்டையை எறிகின்றனர். முதல் A எறிகிறார் எனின்,

   a. A தனது 3 ஆவது தடவையில் வெற்றி பெறுவதற்கு,
   b. B தனது 3 ஆவது தடவையில் வெற்றி பெறுவதற்கு,
   c. B வெற்றி பெறுவதற்கு, நிகழ்தகவு யாது?

4. ஒருவர் வாடகைக் கார் தேவைப்படுமிடத்து X, Y, Z ஆகிய கம்பனிகளில் ஒன்றிலிருந்து வரவழைக்கிறார். 40%, X இலிருந்தும் 50% Y இலிருந்தும் 10% Z இலிருந்தும் வரவழைக்கிறார் X இலிருந்து 9% ஆனவை பிந்தி வருகின்றன. Y,Z வரவழைக்கப்படும் கார்களில் இதற்கு ஒத்த சதவீதங்கள் முறையே 6% , 20% ஆகும். அவர் அடுத்து வரவழைக்கப்படும் கார்.

   a. x இலிருந்து பிந்திவராமலிருப்பதற்கான நிகத்தகவு யாது?
   b. பிந்தி வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
   c. கார் பிந்தி வந்ததெனின், அக்கார் Y இலிருந்து வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

5. a. $P(A) = 0.25, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.5$ எனின்
   $P(A \cap B), P(A \cap B^1)$ என்பவற்றைக் காண்க.

b. A, B என்பன இரு சாராநிகழ்ச்சிகள் ஆகும்
$P(A) = 0.4$ $P(A \cup \bar{B}) = 0.9$ எனின் P (B) ஐக் காண்க.

c . A, B, C எனும் 3 மாணவர்கள் பிரசினம் ஒன்றைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே ½, 1/3 , ¼ ஆகும். எவராவது ஒருவர் அப்பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

6. தளமொன்றில் 6 நேர்கோடுகள் வரையப்பட்டு அவை யாவும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக்கு நீட்டப்பட்டுள்ளன. எந்த இரு நேர் கோடுகளும் சமாந்தரமல்ல எனவும், மூன்று நேர் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கவில்லை எனவும் கொண்டு, இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 15 எனக் காட்டுக.
மூன்று புள்ளிகள் எழுமாற்றாகத் தெரியப்பட்டால் அவையாவும் தரப்பட்ட நேர் கோடொன்றில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{12}{91}$ எனக் காட்டுகக.
நான்கு புள்ளிகள் தெரியப்பட்டால் அவையாவும் தரப்பட்ட நேர் கோடொன்றில் அமையாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{89}{91}$ எனக் காட்டுக.

7. செயற்குழு ஒன்றின் அங்கத்தினர்கள் ஏழுபேரில் 4 பெண்களும் 3 ஆண்களும் உள்ளனர். அவர்கள் அடுத்த சனிக்கிழமை சந்திப்பதற்குத் திட்டமிட்டுள்ளனர். ஒவ்வொரு ஆணும் மற்ற எந்த ஒருவரிலும் சாராது கூட்டத்திற்கு சமூகமளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ பெண்கள் ஒவ்வொருவரும் மற்றைய ஆண்களையும், பெண்களையும் சாராது சமூகமளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ ஆகும்.
சமூகமளிக்கும் ஆண்களின் எண்ணிக்கை

a. 0, b. 1 c. 2 d. 3 ஆகஇருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

e. கூட்டத்திற்கு சமூகமளிக்கும் பெண்களின் எண்ணிக்கை ஆண்களின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

f. இருபாலரும் சமூகமளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

g. கூட்டத்தில் குறைந்தும் 1 ஆணும் 1 பெண்ணும் கலந்து கொண்டார்கள் எனத் தரப்படின் சம எண்ணிக்கையான ஆண்களும் பெண்களும் கலந்து கொண்டதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$$\left[\frac{1}{27}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}. \frac{8}{27}, \frac{43}{144}, \frac{65}{72}, \frac{64}{195}\right]$$

புள்ளிவிபரவியல்

தரவுகளின் வகை :- பின்னகத்தரவு தொடர்ச்சியான தரவு.

தரவுகளை வகைக் குறித்தல் :- சலாகை வரைபு, வட்ட வரைபு, கோட்டு வரைபு, வலையுரு வரையம், பெட்டி வரைபு.

தரவுகள் தரகவல்களைள அட்டவணைப்படுத்தல் :-

i) கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பல்

ii) கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல்

மைய நாட்ட அளவைகள் :- இடை,இடையம், ஆகாரம், என்பனவாகும்.

i) $x_1, x_2, \dots\dots\dots x_n$ என்பன தரவுகளாக உள்ள போது.

இடை $\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$ $\bar{x} = A + \frac{\sum di}{n}$ இங்கு $d_i = x_i - A$

ii) $x_1, x_2, \dots\dots\dots x_n$ என்பன $f_1, f_2, \dots\dots\dots f_n$ ஐ மீடிறன்களாக கொண்டுள்ள போது

இடை $\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$, $\bar{x} = A + \frac{\sum fidi}{n}$

A = உத்தேச இடை $\frac{\sum di}{n}$, $\frac{\sum fidi}{\sum fi}$ என்பன விலகல் இடை.

குறிப்பு :- கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கு xi என்பது வகுப்பாயிடையின் நடுப்பெறுமானம்

நிறைவேற்றிய இடை $\bar{x} = \frac{\sum W_i xi}{\sum Wi}$, $Wi = xi$ இன் நிறை

<u>**ஆகாரம் (Mode)**</u> :- அதிகூடிய மீடிறனைக் கொண்ட மாறியின் பெறுமானம்.

கூட்டமாக்கப்பட்ட பரம்பலுக்கு ஆகாரம் பின்வருமாறு கணிக்கப்பட்டு.

ஆகாரம் $M_o = L_{mo} + C\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$

$L_{mo} =$ ஆகாரவகுப்பின் கீழ் எல்லை

$\Delta_1 = f_{mo} - f_{mo-1}$

$\Delta_2 = f_{mo} - f_{mo+1}$

C = ஆகார வகுப்பின் பருமன் f_{mo} - ஆகார வகுப்பின் மீடிறன்

<u>**இடையம் (Median)**</u> :- வரிசைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகளின் நடுப்பெறுமானம்.

n தரவுகளின் ஏறுவரிசைப் படுத்தப்பட்ட ஒழுங்கு $x_1, \dots \dots \dots x_n$ எனின் $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ வது ஈட்டு இடையம் ஆகும்.

கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கான இடையம் (Me)

$Me = L_{me} + \frac{(N/_2 - F)C}{f_c}$

$L_{me} =$ இடைய வகுப்பின் கீழ் எல்லை.

$F = L_{me}$ இற்கு கீழுள்ள திறன் மீடிறன்

$f_c =$ இடைய வகுப்பின் மீடிறன்

$C =$ வகுப்பாயிடையின் பருமன்

<u>**காலணைகள் :-**</u>

முதலாம் காலணை (Q_1) :- ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட n ஈட்டுக்களைக் கொண்ட தரவு ஒன்றில் $\frac{(n+1)}{4}$ வது ஈட்டு

3ம் காலணை (Q_3) $^3/_4\,(n+1)$ வது ஈட்டு

கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கு

$$Q_1 = L_{Q1} + \frac{(N/_4 - F)C}{fc}$$

$$Q_3 = L_{Q3} + \frac{(3N/_4 - F)C}{fc}$$

L_{Q1} , L_{Q3} என்பன முறையே காலணை வகுப்புகளின் கீழ் எல்லைகள்.

$f_c -$ காலணை வகுப்பின் மீடிறன்

$F -$ காலணை வகுப்பிற்கு முந்தய வகுப்பின் திரள் மீடிறன்

$C -$ வகுப்பாயிடையின் பருமன்.

காலணையிடை வீச்சு $= Q_3 - Q_1$

காலணையிடை விலகல் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

இடைவிலகல் :- M.D $= \frac{\sum_1^n |X_1 - X|}{N}$

மீடிறன் பரம்பலுக்கு :- M.D $= \frac{\sum_1^n fi|X_1 - X|}{\sum_1^N fi}$

மாறற்றிறன் $V(x) = \sigma^2$ $= \frac{\sum \ (x_1 - \bar{x})^2}{N}$

$= \frac{\sum_1^N xi^2}{N} - \bar{x}^2$

மீடிறன் பரம்பலுக்கு σ^2 $= \frac{\sum_1^n fi(x_1 - \bar{x})^2}{\sum fi}$

$= \frac{\sum_1^n fix_1^2}{\sum fi} - \bar{x}^2$

நியம விலகல் (S.D) = S = σ = $\sqrt{\text{மாறற்றிறன்}}$

a, b மாறிலிகளாக உள்ள போது

y = ax + b (உருமாற்றம்)

$\bar{y} = a\bar{x} + b$

$S_y = |a|S_x$

Z புள்ளி :- $x_1, x_2 \dots \dots \dots x_n$ என்பவற்றின் இடை $\bar{x}$ எனவும் நியம விலகல் S எனவும் கொண்டால் $Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$

கூட்டு இடை :- n_1, n_2 எண்ணிக்கை கொண்ட தரவுத் தொகுதியின் இடைகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ எனின்

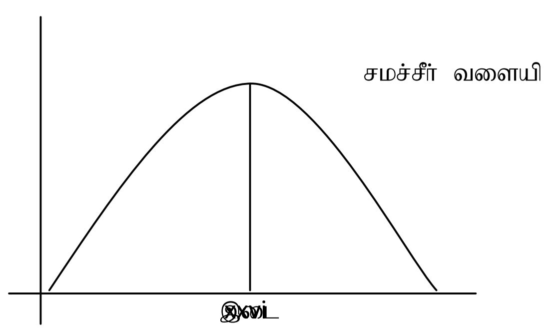
கூட்டு இடை $\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

கூட்டு நியமவிலகல் $S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2}\left[n_1 s_1^2 + n_2 S_2^2 + \frac{n_1 n_2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}\right]$

$\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ எனின்

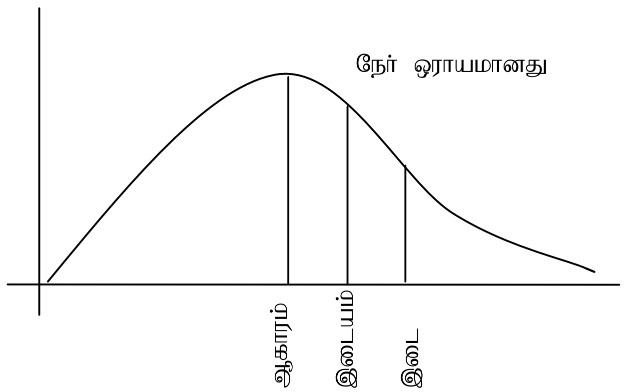
$S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2}[n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2]$

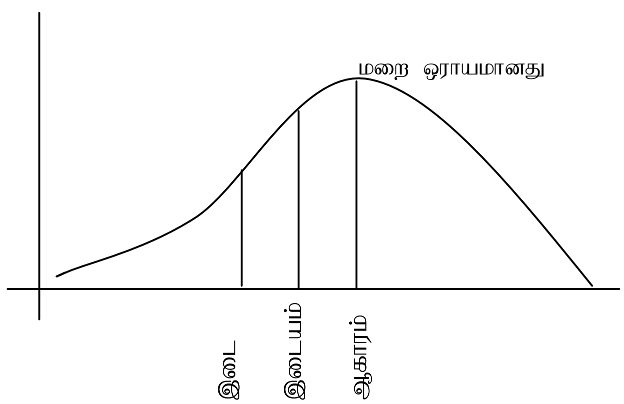
பரம்பலின் வடிவம்



= இடையம்

= ஆகாரம்





நேர் ஓராயம் எனின் ஆகாரம் < இடையம் < இடை

மறை ஓராயம் எனின் இடை < இடையம் < ஆகாரம்

பியர்சனின் ஓராயக்குணகம் $\lambda = \dfrac{(\text{இடை} - \text{ஆகாரம்})}{\text{நியமவிலகல்}}$

$$\lambda = \frac{3(\text{இடை} - \text{இடையம்})}{\text{நியமவிலகல்}}$$

மாறல் குணகம் = $\dfrac{\text{நியமவிலகல்}}{\text{இடை}} \times 100\%$

பயிற்சி வினாக்கள்

1) குறித்த நிறுவனம் ஒன்றில் கடமையாற்றும் ஊழியர்கள் 1020 பேரின் வயது தொடர்பான பரம்பல் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

வயது	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54
மீடிறன்	12	96	198	324	216	107	67

இப்பரம்பலின்

i. இடை

ii. இடையம்

iii. ஆகாரம்

iv. நியமவிலகல்

v. ஓராயக்குணகம் என்பவற்றைக் காண்க.

இப்பரம்பலின் வடிவம் பற்றி யாது கூறுவீர்.

2) தொழிற்சாலையொன்றில் பொருள் உற்பத்திக்கு A,B என்ற இரு யந்திரங்கள் பாவிக்கப்படுகின்றன. 100 நாட்களில் அந்த இயந்திரங்கள் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட திருத்தமற்ற (பழுதான) பொருட்களின் அளவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

பொருட்களின் எண்ணிக்கை	**இயந்திரம் A (நாட்கள்)**	**இயந்திரம் B (நாட்கள்)**
1 – 10	12	07
11 – 20	43	26
21 – 30	28	31
31 – 40	14	35
41 – 50	03	01

i. இயந்திரம் A இனால் நாளொன்றில் உற்பத்தி செய்யப்படும் பழுதான பொருட்களின் இடை யாது?

ii. இயந்திரம் B யினால் நாளொன்றில் உற்பத்தி செய்யப்படும் பழுதான பொருட்களின் எண்ணிக்கை யாது?

iii. தொழிற்சாலையில் நாளொன்றில் உற்பத்தி செய்யப்படும் பழுதான பொருட்களின் எண்ணிக்கை யாது?

iv. இயந்திரங்கள் A,B மூலம் பழுதான பொருட்களின் எண்ணிக்கையின் மாறற்றிறனை வெவ்வேறாகக் காண்க.

v. தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பழுதான பொருட்களின் மாறற்றிறனைக் காண்க.

vi. தொழிற்சாலையில் எந்த இயந்திரம் உற்பத்தி செய்யும் பழுதான பொருட்கள் விரைவாக மாற்றமடைகின்றது.

3) குடித்தொகையொன்று n_1 ஆண்களையும் n_2 பெண்களையும் கொண்டுள்ளது. ஆண்களினதும் பெண்களினதும் இடை உயரங்கள் முறையே $\bar{x}_M$, $\bar{x}_F$ ஆகவும் மாறற்றிறங்கள் σ_M^2, σ_F^2 ஆகவும் உள்ளது. முழுக் குடித்தொகையின் இடை உயரம் $\bar{x}$ ஆயும் மாறற்றிறன் σ ஆயும் இருப்பின்

$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_M + n_2\bar{x}_F}{n_1+n_2}$ எனவும்

$\sigma_x^2 = \frac{1}{n_1+n_2}\left\{n_1\sigma_M^2 + n_2\sigma_F^2 + \frac{n_1n_2}{n_1+n_2}\,(\bar{x}_M - \bar{x}_F)^2\right\}$ எனவும் நிறுவுக.

20 மாணவர்களுக்கான சோதனை ஒன்றின் இடை 40, நியமவிலகல் 5 எனக் கணிக்கப்பட்டது. கணித்தலின் போது 15 என்பது தவறுதலாக 50 என வாசிக்கப்பட்டது. சரியான இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க. 30 மாணவர்களைக் கொண்ட இன்னொரு குழுவினருக்கு இச்சோதனைக்கான இடை 45.25 எனவும் நியமவிலகல் 8 எனவும் காணப்பட்டது. இரு குழுக்களினதும் மொத்த மாணவர்கள் 50 பேரின் இடையையும் நியமவிலகலையும் கணிக்க.

4) a) ஒரு தரவுத்தொகுதியொன்றில் $x-4, x-2, x+1, x+2, x+4, x+5$ ஆகிய எண்கள் தரப்படுகின்றன.

i) தரவுத் தொகுதியின் நியம விலகலைக்கணிக்க.

ii) மேலே தரப்பட்ட தரவுத் தொகுதியின் இடை 7 எனின் X இன் பெறுமதி யாது?

b) 4, 1, 13, 7, 8, 4, a, b என்ற எண் தொகுதியொன்றின் இடை 6 ஆகவும் நியமவிலகல் $\sqrt{12.5}$ ஆகவும் இருப்பின் a,b என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

5) a) 1, 3, 6, 10, 8+n, 8-n ஆகிய ஆறு எண்களின் நியமவிலகல் $\sqrt{10}$ ஆகும்.

ை) மேலே தரப்பட்ட 6 இலக்கங்களினதும் இடையைக் கணிக்க.

ை) n இற்கு பொருத்தமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

b) x>0 ஆயுள்ள போது x - 3, x - 1, x + 2, x + 3, x + 5, x + 6 ஆகிய 6 இலக்கங்கள் தரப்படுகின்றன.

i) பின்வருவனவற்றை x சார்பாகத் தருக.

அ) இடை

ஆ) இடையம்

ii) இந்த 6 இலக்கங்களினதும் நியமவிலகலைக் காண்க.

6) a) எண்தொகுதியொன்றின் இடை μ உம் மாறற்றிறன் σ^2 உம் ஆகும். ஒவ்வொரு எண்ணுடன்

i) மாறிலி m கூட்டப்படும் போது

ii) ஒவ்வொரு எண்ணும் மாறிலி m ஆல் பெருக்கப்படும் போது புதிய இடை நியமவிலகல்களை கணிக்க.

புதிய இடை 0 ஆயும் நியமவிலகல் σ உம் பெறப்படுவதற்கு உருமாற்றத்தை தருக.

b) பரீட்சை புள்ளி தொகுதியொன்றின் இடை 44 ஆயும் நியமவிலகல் 10 ஆயும் உள்ளது. இப்புள்ளிகள் ஒரு ஏகபரிமாணத்திட்டத்தின் கீழ் அளவிடைப்படுத்தப் பட்டுள்ளது. 80 மூலப் புள்ளியானது அளவிடையின் கீழ் 100 புள்ளியாகவும் 20 மூலப் புள்ளியானது அளவிடையின் கீழ் 10 என்ற புள்ளியாகவும் மாற்றப்படுகின்றது.

i) அளவிடைப் படுத்தப்பட்ட புள்ளித் தொகுதியின் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க.

ii) இவ்வளவிடையால் மாற்றப்படாத புள்ளி எது?

7) பின்வரும் அட்டவணையானது பரீட்சை பெறுபேறுகளின் அடிப்படையில் உயிரியல், இரசாயனவியல் ஆகிய பாடங்களின் இடை, நியமவிலகல் என்பனவற்றை காட்டுகின்றது.

பாடம்	**இடை**	**நியமவிலகல்**
உயிரியல்	56	10
இரசாயனவியல்	48	15

$y = ax + b$ என்ற உருமாற்றத்தைப் பயன்படுத்தி இரசாயனவியல் பாடத்திற்கான புள்ளிகள் நியமப்படுத்தப்படும் போது இடைநியமவிலகல் என்பன மாறாமல் இருந்தன. a,b என்பவற்றைக் காண்க. இரசாயனவியல் பாடத்திற்கான மூலப்புள்ளி 54 ஆயும் உயிரியல் பாடத்திற்கான மூலப்புள்ளி 60 ஆயும் இருப்பின் அம்மாணவன் எப்பாடத்தில் அனுகூலமடைவான்?