(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது All Rights Reserved)

மொறட்டுவை பல்கலைக்கழக பொறியியற்பீட தமிழ் மாணவர்கள் நடாத்தும்
கல்விப் பொதுத் தராதர உயர்தர (கணித, விஞ்ஞான) மாணவர்களுக்கான 6 ஆவது
முன்னோடிப் பரீட்சை -2015

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர) முன்னோடிப் பரீட்சை - 2015
General Certificate of Education (Adv. Level) Pilot Examination - 2015

Combined Mathematics I
இணைந்த கணிதம் I

10 T I

Three hours
மூன்று மணித்தியாலம்

NAME :– ....

INDEX .NO : -.................................

அறிவுறுத்தல்கள்:

* இவ்வினாத்தாள் பகுதி ***A*** (வினாக்கள் 1-10), பகுதி ***B*** (வினாக்கள் 11-17), என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது.
* பகுதி ***A***
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிக தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
* பகுதி ***B***
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
* ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி ***A*** ஆனது பகுதி ***B*** யிற்க்கு மேலாக இருக்கத் தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
* வினாத்தாளின் பகுதி ***B*** யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்க்கு அனுமதிக்கபடும்.

(10) இணைந்த கணிதம் I

பகுதி	வினா எண்.	கிடைத்த புள்ளிகள்
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
	மொத்தம்	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	
வினாத்தாள் I இன் மொத்தம்		

வினாத்தாள் I	
வினாத்தாள் II	
மொத்தம்	
இறுதிப் புள்ளிகள்	

[பக். *2* ஐப் பார்க்க

Q1). $f(n)=10^{2n-1}+1$ எனக் கொள்வோம். $f(P+1)-f(P)=99.10^{2p-1}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $P\in\mathbb{Z}^{+}$ ஆகும். **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன் படுத்தி எல்லா $n\in\mathbb{Z}^{+}$ இற்கும் $10^{2n-1}+1$ ஆனது 11 ஆல் வகுபடுமெனக் காட்டுக.

Q2). **MERSALaAYITTEN** என்னும் சொல்லின் எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி ஆக்கத்தக்க ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவ்வொழுங்கமைப்புக்களில் எத்தனையில் **AILa** என்ற சொல் ஒன்றாக வரும்.

Q3). சமனிலி $\dfrac{12}{x-3} < x+1$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

Q4). $m, n \in \mathbb{Z}^{+}$ இற்கு $(1+x)^{m}(1-x)^{n}$ இன் விரிவில் x இன் குணகமும், x^{2} இன் குணகமும் முறையே $3, -6$ ஆகும். m, n ஐக் காண்க.

Q5). $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} - \sqrt{x}\right)\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)} = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$ எனக் காட்டுக.

Q6). வளையி $y = x^2 + x + 1$ இற்கு புள்ளி $(1,3)$ இல் வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ் வளையியாலும் இத் தொடலியாலும் $x+1=0, y=0$ ஆகிய கோடுகளாலும் அடைக்கும் உருவத்தின் பரப்பு $\dfrac{7}{6}$ சதுர அலகு எனக் காட்டுக.

[பக். 5 ஐப் பார்க்க

Q7). ஒரு முக்கோணியின் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(a\cos t, a\sin t),(b\sin t,-b\cos t),(1,0)$ ஆகும். இங்கு t ஓர் பரமானமாகும். இம்முக்கோணியின் மையப்போலியின் ஒழுக்கு வட்டம் எனக் காட்டி அதன் மையம்,ஆரை என்பவற்றை எழுதுக.

Q8). கோடு $(2+3\lambda)x+(3-\lambda)y-5-2\lambda=0$ ஆனது ஓர் நிலைத்த புள்ளியினூடு செல்லும் எனக் காட்டி அப்புள்ளி ஐக் காண்க.

Q9). ஆள்கூற்று அச்சுக்களையும் $x = a$ எனும் கோட்டையும் தொட்டுக்கொண்டு செல்லும் வட்டங்களின் சமன்பாடு $4\left(x^2 + y^2\right) - 4ax \pm 4ay + a^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

Q10). $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} + \dfrac{\tan x}{\sqrt{\sec^2 x - 1}} + \dfrac{\cot x}{\sqrt{\cos ce^2 x - 1}}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x)$ இன் இழிவுப்பெறுமானம் காண்க. அது அடையப்படும் x ஐக் காண்க.

[பக். 7 ஐப் பார்க்க

(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது All Rights Reserved)

மொறட்டுவைப் பல்கலைக்கழக பொறியியற்பீட தமிழ் மாணவர்கள் நடாத்தும்
கல்விப் பொதுத் தராதர உயர்தர (கணித, விஞ்ஞான) மாணவர்களுக்கான 6 ஆவது
முன்னோடிப் பரீட்சை -2015

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர) முன்னோடிப் பரீட்சை - 2015
General Certificate of Education (Adv. Level) Pilot Examination - 2015

Combined Mathematics I
இணைந்த கணிதம் I

10 T I

பகுதி B * ஐந்து வினாக்களிற்கு மட்டும் விடை தருக.

Q11) a. α,β என்பது சமன்பாடு $x^2+2px+q^2=0$ இன் மூலகங்கள் எனவும் γ,δ என்பது சமன்பாடு $x^2+2mx+n^2=0$ இன் மூலகங்கள் எனவும் கொள்வோம் இங்கு $b,c,m,n\in\mathbb{R}$.

(i) $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ எனின் $p^2+n^2=q^2+m^2$ எனவும்

(ii) $\alpha\gamma+\beta\delta=0$ எனின் $q^2n^2=p^2n^2+q^2m^2$ எனவும் காட்டுக.

வளையி $y=x^2+(2x+3)-k$ அனது x அச்சை வெட்டும் புள்ளி A,B எனவும் வளையி $y=x^2+2(2x+k)-3$ அனது x அச்சை வெட்டும் புள்ளி P,Q எனவும் கொள்வோம்.

$AB=PQ$ எனின் k ஐக் காண்க.

b. $f(x)=x^4-2x^2+6$ எனக் கொள்வொம். மீத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $f(x)$ இற்கு $(x-\alpha)$ எனும் வடிவில் காரணி **இல்லை** எனக் காட்டுக. $f(x)\geq 30$ ஆகுமாறு x இன் வீச்சைக் காண்க.

$g(x)=3f(x)+bx^3+cx$ ஆகுமாறு b,c என்பன மெய் மாறிலிகளாகும். $(x-1)$ உம் $(x-2)$ உம் $g(x)$ இன் காரணிகள் எனின் b,c ஐக் காண்க. $g(x)\geq 0$ ஆகுமாறு x இன் வீச்சைக் காண்க.

Q12) a. $\frac{4}{1.2.3}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{2.3.4}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{6}{3.4.5}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$ எனும் தொடரின் r ஆம் உறுப்பு U_r எனவும் $r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $S_n=\sum_{r=1}^{n}U_r$ எனவும் கொள்வோம்.

$r\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $\dfrac{U_r}{\left(\frac{1}{3}\right)^r}=\dfrac{A}{r(r+1)}+\dfrac{B}{(r+1)(r+2)}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A,B ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $n\in\mathbb{Z}^+$ இற்கு $S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ ஒருங்குகிறதா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

b. பயன்படுத்தும் உண்மைகளைத் தொளிவாகக் குறிப்பிட்டு $y = x^2 - b$ இன் வரைபை வரைக. இங்கு $b > 0$

$y = \left|x^2 - b\right|$ இன் வரைபை உய்த்தறிக. $y = \left|x^2 - 1\right|, y = \left|x^2 - 7\right|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே உருவில் வரைக. பிரதேசம் $\left\{(x, y) : \left|x^2 - 7\right| \geq y \geq \left|x^2 - 1\right|\right\}$ ஐ நிழற்றி இவ் நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பைக் காண்க.

Q13) a. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ஓர் 2×2 தாயமெனக் கொள்வோம்.

$a, b \in \mathbb{R}$ ஆயிருக்கையில் $a\mathbf{I} + b\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானம் காண்க. இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது 2×2 சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமும் $\mathbf{O}$ ஆனது 2×2 பூச்சியத் தாயமுமாகும். **இதிலிருந்து** $\mathbf{A}^{-1}$ ஐக் காண்க.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ ஓர் 2×2 தாயமெனக் கொள்வோம். $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ எனும் வடிவில் உண்டு என்பதை கருத்தில் கொண்டு $\mathbf{B}^{-1}$ ஐக் காண்க. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \mathbf{C} . \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ஆகுமாறு 2×2 தாயம் $\mathbf{C}$ ஐக் காண்க.

b. **கணிதத்தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பாவித்து, பூச்சியமல்லாத யாதாயினும் ஓர் நேர் நிறையெண் n இற்கு $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ எனக் காட்டுக.

$(1+x)^n$ இற்கான ஈருறுப்பு விரிவைக் கருதி $\text{Re}\left\{(1+i)^n\right\}, \text{Im}\left\{(1+i)^n\right\}$ ஐக் காண்க.**இதிலிருந்து**

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\tan\frac{n\pi}{4} = \frac{{}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - {}^nC_7 + \dots\dots\dots}{1 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - {}^nC_6 + \dots\dots\dots\dots\dots}$ என உய்த்தறிக.

Q14) a. $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 4}{x^2 + 2x + 4}$ எனக் கொள்வோம்.

$f'(x) = \frac{8(x-2)(x+2)}{\left(x^2 + 2x + 4\right)^2}$ எனக்காட்டி $y = f(x)$ இன்வரைபு $(-2, 5), \left(2, -\frac{1}{3}\right)$ ஆகியவற்றில் திரும்பற் புள்ளிகளை உடையது என்பதனை **உய்த்தறிக.**

திரும்பற் புள்ளிகளையும் அணுகு கோடுகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபை பருமட்டியாக வரைக. **இதிலிருந்து**, சமன்பாடு $\left(x^2 - 6x + 4\right) = \left(x^2 + 2x + 4\right).\left(e^x - e^{-x}\right)$ இன் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

b. அடைத்த செவ்வட்ட உருளை ஒன்றின் மொத்த மேற்பரப்பளவு $2\pi\mathbf{m}^2$ ஆகும். இதன் கனவளவு $V = \pi\left(r - r^3\right)\mathbf{m}^3$ ஆகும் எனக் காட்டுக. இங்கு r என்பது உருளையின் ஆரையாகும். r மாற உருளையின் கனவளவன் உயர் பெறுமானம் $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\mathbf{m}^3$ எனக் காட்டுக.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

Q15) **a.** உகந்த பிரதியீட்டைச் செய்து $\int_0^{\pi} \frac{1}{4-3\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)$ எனக் காட்டுக.

b. $f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1}$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $A, B \in \mathbb{R}$ ஆகும். $f(x) + f'(x) = \frac{x^3 - x + 2}{\left(x^2+1\right)^2}$ ஆகுமாறு A, B ஐக் காண்க.

பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\pi} e^x . \frac{x^3 - x + 2}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$ இன் பெறுமானம் காண்க.

c. $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}}\,\mathrm{d}x$ எனக் கொள்வோம்.

$x \in (0,1)$ இற்கு $4 - 2x^2 < 4 - x^2 - x^3 < 4 - x^2$ எனக் காட்டி $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} > I > \frac{\pi}{6}$ ஐ உய்த்தறிக.

Q16) **a.** (x_1, y_1) எனும் நிலையான புள்ளியினூடு செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ எனும் பரமான வடிவத்தில் வெளிப்படுத்தலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு $\tan\theta$ என்பது அக்கோட்டின் படித்திறனாகும். r என்பது பரமானமாகும். இப்பரமானத்தை இனம் காண்க.

இக்கோடானது $A(-5,-4)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்று நேர்கோடுகள் $x + 3y + 2 = 0,$ $2x + y + 4 = 0,$ $x - y - 5 = 0$ என்பவற்றை முறையே B, C, D எனும் புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

$\left(\frac{15}{AB}\right) = \cos\theta + 3\sin\theta$ எனக் காட்டி $\left(\frac{10}{AC}\right)$ ஐயும் $\left(\frac{6}{AD}\right)$ ஐயும் θ இன் சார்பில் காண்க.

இதிலிருந்து $\left(\frac{15}{AB}\right)^2 + \left(\frac{10}{AC}\right)^2 = \left(\frac{6}{AD}\right)^2$ எனின் அக்கோட்டின் சமன்பாடைக் காண்க.

b. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$ $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ என்னும் இரு வட்டங்கள் நிமிர்கோணமுறையாக வெட்டுமெனின், $2gg' + 2ff' = c + c'$ எனக் காட்டுக.

$\boldsymbol{S} \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ எனவும் $\boldsymbol{S'} \equiv x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$ எனவும் கொள்வோம். $\boldsymbol{S} = 0$ உம் $\boldsymbol{S'} = 0$ உம் நிமிர்கோணமுறையாக இடைவெட்டும் எனக் காட்டுக. இவ்விரு வட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளிக்கூடாகவும் $\boldsymbol{S} = 0$ இன் மையத்தின் உடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

Q17) a. $-\frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ இற்கு $f(x) = \frac{1+\tan x}{\cos x + \tan x.\sin x}$ எனக் கொள்வோம்.

$f(x)$ ஐ வடிவம் $A\sin(x+\alpha)$ யில் எடுத்துரைக்க. இங்கு $A(>0), \alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்.

$y = f(x)$ இன் வரைபை பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து சமன்பாடு $\sin x + \cos x = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}x$ ஐத் தீர்க்க.

b. $x = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ எனின் $x = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) + \frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)\cos 2\theta$ எனக் காட்டுக.

a, b என்பன நேர் மாறிலியாகவும் $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right)$ என்பது மாறும் கோணமாகவும் இருக்கையில்,

$y = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} + \sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$ எனக் கொள்வோம். மேலுள்ள பேறைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக $y^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) - x\right\}^2}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $(a+b) \le y \le \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$ எனக் காட்டுக.

$\sqrt{1+\sin^2\theta} + \sqrt{1+\cos^2\theta}$ இன் வீச்சைக் காண்க.

END OF QUESTIONS

(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது All Rights Reserved)

மொறட்டுவை பல்கலைக்கழக பொறியியற்பீட தமிழ் மாணவர்கள் நடாத்தும்
கல்விப் பொதுத் தராதர உயர்தர (கணித, விஞ்ஞான) மாணவர்களுக்கான 6 ஆவது
முன்னோடிப் பரீட்சை -2015

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர) முன்னோடிப் பரீட்சை – 2015
General Certificate of Education (Adv. Level) Pilot Examination - 2015

Combined Mathematics II
இணைந்த கணிதம் II

10 | T | II

Three hours
மூன்று மணித்தியாலம்

NAME :– ....

INDEX .NO : -..................................

அறிவுறுத்தல்கள்:

* இவ்வினாத்தாள் **பகுதி** ***A*** (வினாக்கள் 1-10), **பகுதி** ***B*** (வினாக்கள் 11-17), என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது.
* **பகுதி** ***A***
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிக தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
* **பகுதி** ***B***
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
* ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி** ***A*** ஆனது **பகுதி** ***B*** யிற்க்கு மேலாக இருக்கத் தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
* வினாத்தாளின் **பகுதி** ***B*** யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்க்கு அனுமதிக்கபடும்.

(10) **இணைந்த கணிதம் I**

பகுதி	வினா எண்.	கிடைத்த புள்ளிகள்
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
	மொத்தம்	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	
வினாத்தாள் I இன் மொத்தம்		

வினாத்தாள் I	
வினாத்தாள் II	
மொத்தம்	
இறுதிப் புள்ளிகள்	

Q1). ஓர் துணிக்கை ஆனது நிலத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O விலிருந்து வேகம் u உடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகின்றது. நிலத்திலிருந்து h உயரத்தை அடைகையில் எடுத்த நேரம் t ஆகும்.

வேக - நேர வரைபை வரைந்து $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ எனக் காட்டுக. மீண்டும் நிலத்தை அடைய எடுத்த நேரத்தை உய்த்தறிக.

....

Q2). சீரான கதி u உடன் நேர் கோட்டில் செல்லும் நீராவிக்கப்பலைப் பிடிப்பதற்கு ஒரு படகு துறைமுகமொன்றிலிருந்து புறப்படுகின்றது. கப்பலின் பாதைக்கும் துறைமுகத்துக்குமிடையிலான மிகக் குறுகிய தூரம் a ஆகும். கப்பல் துறைமுகத்திலிருந்து b தூரத்திலிருக்கையில் படகு புறப்படுகின்றது.கப்பலானது இன்னும்மிகக் குறைந்த புள்ளியை அடையவில்லை. கப்பலை அடைவதற்குப் படகிற்கு தேவையான அதிகுறைந்த சீரான கதி $\frac{au}{b}$ எனக் காட்டுக.

....

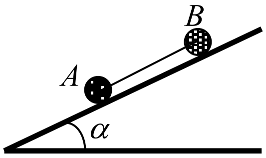
Q3). சைக்கிளோடு சேர்த்து சைக்கிளோட்டி ஒருவனின் திணிவு M**kg** ஆகும். அவன் காலுழக்காது m இல் 1 என்னும் சாய்விற் கீழ்முகமாய் v**ms**$^{-1}$ எனும் மாறா வேகத்தோடு ஓடினான் ஆயின், அதே வேகத்தோடு n இல் 1 என்னும் சாய்விலே மேன்முகமாகப் போதற்கு அவன் $Mg\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)v$ இற்குச் சமனான வீதத்தோடு வேலை செய்ய வேண்டும் எனக் காட்டுக.

Q4). a ஆரையுடைய ஒப்பமான பொட்கோளத்தின் அதிதாழ் புள்ளியில் m திணிவுடைய துணிக்கை வைக்கப்பட்டு கிடையாக கதி $\sqrt{nga}$ உடன் எறியப்படுகின்றது. இத்துணிக்கையானது $\frac{2\pi}{3}$ திரும்பியதும் வட்ட இயக்கத்திலிருந்து விலகும் எனின் $n=\frac{7}{2}$ எனக் காட்டுக.

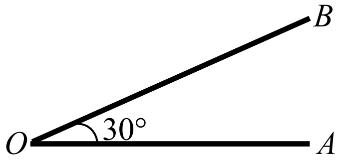
Q5). $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ என்பன இரு காவிகள் எனக் கொள்வோம். $\mathbf{a}$ உம் $\mathbf{b}$ உம் செங்குத்து **எனின் எனின் மட்டும்** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ எனக் காட்டுக.

Q6). நீளா இழை ஒன்றின் முனைகளில் w_1, w_2 எனும் நிறைகளையுடைய A, B எனும் இரு துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டு படத்தில் காட்டியவாறு α சாய்வுடைய கரடான சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட இழை இறுகி எல்லைச்சமனிலை அடைகிறது. சாய்தளத்தில் A, B இற்கான உராய்வுக்குணகங்கள் முறையே μ_1, μ_2 உம் $\mu_1 < \tan\alpha < \mu_2$ உம் எனின்,

$$\tan\alpha = \frac{\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2}{w_1 + w_2}$$ எனக் காட்டுக.



Q7). படத்தில் காட்டியவாறு ஒரே பதார்த்தத்தால் ஆன OA, OB என்னும் இரு சீர்க் கோல்கள் $A\hat{O}B = \frac{\pi}{6}$ ஆகுமாறு விறைப்பாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. $OA = 2a, OB = 2b$ எனின் பொருள் AOB யின் புவியீர்ப்பு மையம் O விலிருந்து $\left(\frac{2a^2 + b^2\sqrt{3}}{2(a+b)}, \frac{b^2}{2(a+b)}\right)$ என்னும் ஆள்கூறைக் கொண்ட புள்ளியில் உண்டு எனக்காட்டுக.



Q8). இரண்டு வேறுபட்ட நிறங்களையுடைய அறுமுகத் தாயங்கள் ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படுகின்றது. பெறப்படும் இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 7 அல்லது 11 ஆயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

[பக். *6* ஐப் பார்க்க

Q9). a,b என்பன முதல் 100 இயற்கை எண்களில் இரு அடுத்துள்ள நிறை எண்களாகும். $\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}$ ஆனது ஒற்றை நிறை எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

Q10). $2,4,10,12,14,x,y$ எனும் ஏழு இலக்கங்களின் இடையும் மாறல்திறனும் முறையே $8,16$ ஆகும். x,y ஐக் காண்க.

[பக். 7 ஐப் பார்க்க

(முழுப் பதிப்புரிமையுடையது All Rights Reserved)

மொறட்டுவைப் பல்கலைக்கழக பொறியியற்பீட தமிழ் மாணவர்கள் நடாத்தும்
கல்விப் பொதுத் தராதர உயர்தர (கணித, விஞ்ஞான) மாணவர்களுக்கான 6 ஆவது
முன்னோடிப் பரீட்சை -2015

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர) முன்னோடிப் பரீட்சை - 2015
General Certificate of Education (Adv. Level) Pilot Examination - 2015

Combined Mathematics II
இணைந்த கணிதம் II

10 | T | II

பகுதி B * ஐந்து வினாக்களிற்கு மட்டும் விடை தருக.

Q11) a. நிலத்திற்கு மேலே ஓர் உயரம் h இலே நேரம் $t=0$ இல் ஓய்விலிருந்து போடப்படும் ஒரு துணிக்கை A ஈர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்தாக விழுகிறது. அதே கணத்தில் வேறொரு துணிக்கை B நிலத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேகம் u உடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு துணிக்கையின் இயக்கத்துக்குமான வேக-நேர வரைபை வரைக. வேக -நேர வரைபைப் பயன்படுத்தி நேரம் $\frac{h}{u}$ இல் இரு துணிக்கைகளும் நிலத்திலிருந்து ஒரே உயரத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக. இவ் ஒரே உயரம் $h\left(\frac{n-1}{n}\right)$ எனின் $u=(kngh)^k$ என உய்த்தறிக. இங்கு k துணியப்பட வேண்டிய மாறிலியாகும்.

b. M திணிவு கொண்ட ஓர் ஒப்பமான ஆப்பு ஓர் ஒப்பமான கிடைமேசை மீது ஓய்வில் உள்ளது. கிடையுடன் α சாய்வை கொண்ட, ஆப்பின் ஒரு முகம் மீது, m திணிவைக் கொண்ட ஒரு துணக்கை வைக்கப்பட்டு அம்முகத்தின் அதியுயர் சரிவுக்கோடு வழியே வேகம் V உடன் மேலே எறியப்படுகின்றது. ஆப்பின் ஆர்முடுகலின் பருமன் $\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ எனவும் துணிக்கையின் ஆப்பு சார்பான ஆர்முடுகலின் பருமன் $\frac{(m+M)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ எனவும் காட்டுக.

(i) அத்துணிக்கை எறியற் புள்ளிக்கு மேலே h உயரத்திற்கு எழும்பினால் $V=\left(2gh.\frac{M+m}{M+m\sin^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக.

(ii) அத்துணிக்கை மீண்டும் எறிபுள்ளிக்கு திரும்பும் நேரம் $\frac{2V}{(M+m)g}.\left(\frac{M+m\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$ எனக் காட்டுக.

Q12) O வை மையமாகவும் a ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான கோள ஓட்டின் உள்ளே, அதன் அதிதாழ் புள்ளியிலிருந்து m திணிவுடைய ஒரு துணிக்கை P யானது $t=0$ இல் கிடையாக $\sqrt{4ga}$ வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. OP யானது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஒரு கூர்ங்கோணம் θ வை ஆக்கும் போது துணிக்கையின் வேகம் $v=2\sqrt{ga}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ எனவும், கோள ஓட்டினால் துணிக்கைக்குக்

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

கொடுக்கப்படும் மறுதாக்கம் $R = mga\left(2+3\cos\theta\right)$ எனவும் காட்டுக. இத்துணிக்கையானது வட்டத்தை விட்டு விலகும் போது வேகத்தைக் காண்க.

வட்ட இயக்கத்திலிருந்து விலகிய இத் துணிக்கை P யானது புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்பாதையில் தொடர்ந்து இயங்குகிறது. விலகும் புள்ளி L இற் கூடாக கிடையாக x நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி y அச்சுக்களை எடுப்பதன் மூலம் எறியப்பாதையின் கடவையின் சமன்பாடு $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{27}{16a}x^2$ எனக் காட்டுக.

விலகிய இத்துணிக்கையானது கோளத்தின் மையம் O வினூடான கிடை மட்டத்தை புள்ளி S இல் சந்த்திப்பின் $OS = \frac{\left(4\sqrt{23}-5\sqrt{5}\right)}{27}a$ எனவும் இப்புள்ளியை அடைய எடுத்த நேரம் $\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{46}}{3\sqrt{3}}+\ln\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)\right)$ எனவும் காட்டுக.

Q13) திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் $2l$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg யையும் உடைய ஒரு மீள்தன்மை இழையின் நடுப்புள்ளியில் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது $4l$ இடைத் தூரத்தில் இருக்கும் A, B என்னும் இரு நிலைத்த புள்ளிகளுடன் இழையின் இரு நுனிகளும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொடக்கத்திலே துணிக்கையானது மேசை மீதுள்ள அதன் சமனிலைத்தானம் O விலிருந்து $\overrightarrow{AB}$ எனும் திசையில் வேகம் $\sqrt{7gl}$ உடன் எறியப்படுகிறது. நேரம் t யில் $OP = x$ எனின், $0 \le x \le l$ இற்கு $\ddot{x} = -\frac{2g}{l}x$ எனக் காட்டி அலைவுமையத்தையும்,வீச்சத்தையும் காண்க. $x = l$ ஆகும் போது அதன் வேகம் $\sqrt{5gl}$ எனக் காட்டுக.

$l \le x \le 2l$ இற்கு $\ddot{x} = -\frac{g}{l}\left(x+l\right)$ எனக் காட்டி, இத்துணிக்கையானது முதன்முதலாக ஓய்விற்கு வர எடுக்கும் நேரம் $\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)\right)$ எனக் காட்டுக.

Q14) a. செவ்வகம் $ABCD$ ஆனது புள்ளிகள் $A(0,0), B(5,0), C(5,3), D(0,3)$ ஆல் வரையறுக்கப்படுகின்றன. இங்கு நீளங்கள் **m** இல் உண்டு. $6\text{N}, 8\text{N}, 4\text{N}, 2\text{N}$ எனும் பருமங்களை உடைய விசைகள் முறையே $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ வழியே தாக்குகின்றன.

(i) இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளைக் காண்க.

(ii) இவ்விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோட்டிற்கும் $x-$ அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

இத்தாக்கக் கோடானது $x-$அச்சை புள்ளி $(a,0)$ இல் வெட்டுகின்றது.

(iii) புள்ளி A பற்றி திருப்பம் எடுப்பதன் மூலம் a ஐக் காண்க. **இதிலிருந்து** தாக்கக் கோடின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிக.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

b. முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் CA, AB என்பவற்றை உட்புறமாக முறையே E, F என்பவற்றிலும் நீட்டப்பட்ட BC ஐ D இலும் ஒரு நேர் கோடு வெட்டுகிறது. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ எனக் கொள்வோம்.

$\frac{BD}{CD} = p, \frac{CE}{EA} = q, \frac{AF}{FB} = r$ எனின்,

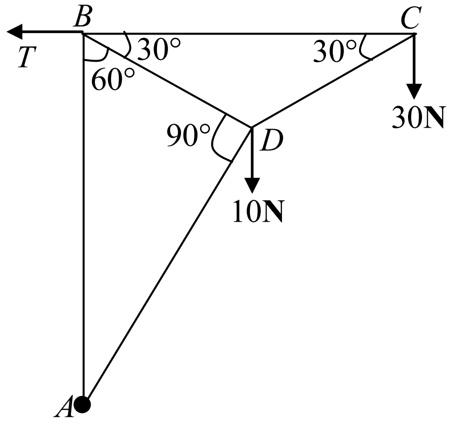
$\overrightarrow{EF} = \frac{r}{(r+1)}\mathbf{b} - \frac{1}{(q+1)}\mathbf{c}$ எனவும் $\overrightarrow{DF} = \frac{pr+1}{(p-1)(r+1)}\mathbf{b} - \frac{p}{(p-1)}\mathbf{c}$ எனவும் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $pqr = 1$ என உய்த்தறிக.

Q15) a. A இல் ஒப்பமாக மூட்டிய, w, w' என்னும் நிறைகளையும் சம நீளங்களையும் உடைய AB, AC என்னும் இரு சீர்க்கோல்கள், ஒரே மட்டத்திலுள்ள B, C எனும் பிணையல்களிலிருந்து ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்தில் தொங்குகின்றன. A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக்கூறு $\frac{1}{4}\frac{(w+w')a}{h}$ என நிறுவுக.

இங்கு, $2a$ என்பது தூரம் BC உம், h என்பது BC இற்குக் கீழே A இன் ஆழமுமாகும். அம்மறுதக்கத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறையும் காண்க.

b. AB, BC, CD, DA, BD என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன.

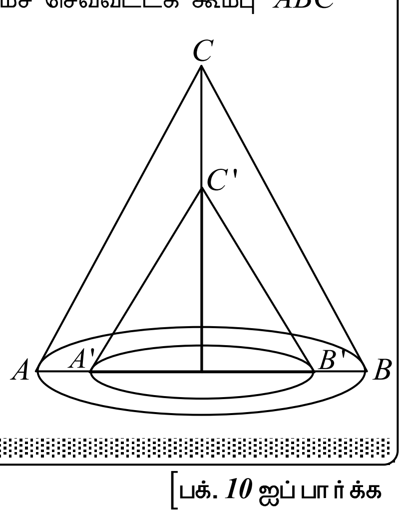


$D\hat{B}C = B\hat{C}D = 30°, A\hat{B}D = 60°, B\hat{D}A = 90°$ ஆகும். சட்டப்படல் A யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை C யில் 30 நியூட்டன் நிறையையும், D யில் 10 நியூட்டன் நிறையையும் காவுகிறது. BC கிடையாக இருக்குமாறு சட்டப்படல் B யில் உள்ள T நியூட்டன் என்னும் ஒரு கிடை விசையால் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது.

போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன் படுத்தி, சட்டப்படலுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படம் வரைந்து இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக்காட்டி எல்லாக்கோல்களிலுமுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

Q16) உயரம் h ஐ உடைய ஒரு சீரான திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம் அதன் சமச்சீரச்சு மீது கூம்பின் அடியில் இருந்து $\frac{1}{4}h$ இல் இருக்கிறது என தொகையிடலின் மூலம் காட்டுக.

உயரம் h ஐயும் அரை உச்சிக் α கோணம் ஐயும் உடைய ஒரு சீர்த்திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பு ABC யிலிருந்து உயரம் h' ஐயும் அரை உச்சிக் கோணம் α ஐயும் உடைய ஒரு சீர்த்திண்மச் செவ்வட்டக்கூம்பு $A'B'C'$ ஐக் குடைந்து அகற்றிய பின்னர் எஞ்சிய பகுதி வரிப்படத்தில் காணப்படுகின்றது. அவ்வாறு தோண்டிய பின்னர் கிடைக்கும் திண்மம் S இன் ஈர்ப்பு மையமானது AB யிலிருந்து $\frac{1}{4}.\frac{(h+h')(h^2+h'^2)}{h^2+h'^2+hh'}$ எனும் தூரத்தில் உண்டு எனக் காட்டுக.



இதிலிருந்து சீரான செவ்வட்ட பொட் கூம்பன் ஈர்ப்பு மையத்தை உய்த்தறிக.

[பக். 10 ஐப் பார்க்க

AB யில் இருந்து $\frac{h'}{4}$ தூரத்தில் பரப்பு $A'C'$மீது உள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து இப் பெருள் S ஆனது நீட்ட முடியாத இலேசான இழை ஒன்றினால் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இந்நிலையில் இழையின் வேறு பாகங்கள் திண்மம் S ஐத் தொடாமல் இவ்விழையானது AB யுடன் β சாந்து சமனிலை அடைந்தது எனின் $3\tan\alpha\tan\beta = \frac{h^3}{h^2h'+hh'^2+h'^3}$ எனக் காட்டுக.

Q17) a. ஒவ்வொரு நாள் மாலையும் ஒரு பையன் **shakthi** ஒளியலை வரிசையை அல்லது **TEN SPORTS** ஒளியலை வரிசையை பார்ப்பான்.அவன் **TEN SPORTS** ஒளியலை வரிசையை பார்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{5}$ ஆகும். அவன் **shakthi** ஒளியலை வரிசையை பார்ப்பான் எனின் தூங்கி விழுவற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$ ஆகும். அவன் **TEN SPORTS** ஒளியலை வரிசையை பார்ப்பான் எனின் தூங்கி விழுவற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும். ஒரு நாள் மாலை ஒளியலை வரிசையை பார்த்துக் கொண்டிருக்கையில் தூங்கி விழுந்தான் எனின் **shakthi** ஒளியலை வரிசையை பார்த்திருந்தமைக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

b. ஒரு குறித்த விவசாயப் பண்ணையிலுள்ள பண்றிகளின் திணிவுகள் கிட்டிய கிலோகிராமிற்கு அளக்கப்படுகின்றன. பெறப்பட்ட தரவுகள் பின்வரும் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவளையில் $75-85, 95-105$ என்னும் திணிவு வச்சுகளின் மீடிறன்கள் தவறியுள்ளன. எனினும் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் இடையமும் ஆகாரமும் முறையே $90\text{kg}, 87.5\text{kg}$ என அறியப்பட்டுள்ளன.

அட்டவளையில் தவறியுள்ள மீடிறன்களை கணித்து, இதிலிருந்து, திணிவுகள் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் இடையையும் நியமவிலகலையும் காண்க.

திணிவு வீச்சு	பன்றிகளின் எண்ணிக்கை
$65-70$	3
$75-85$	f_1
$85-95$	20
$95-105$	f_2
$105-115$	7

END OF QUESTIONS