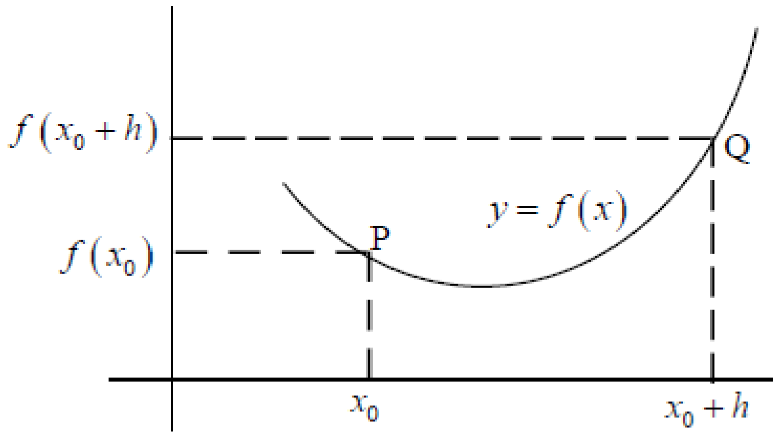
ව්‍යුත්පන්න

ඉගෙනුම් ක්‍රියාවලියට අත්වැලක්

නිපුණතා මට්ටම 14.1

1.



y යනු x හි ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. එය $y = \mathrm{f}(x)$ මගින් නිරූපණය කරයි. x ඛණ්ඩාංකය x_0 වන පරිදි $y = \mathrm{f}(x)$ වක්‍රය මත ඇති ලක්ෂ්‍යයක් P යැයි ගනිමු.

එනම් $\mathrm{P} \equiv (x_0, \mathrm{f}(x_0))$

Q යනු $y = \mathrm{f}(x)$ වක්‍රය මත P ට ආසන්න ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

Q හි x ඛණ්ඩාංකය $x + h$ නම්, එවිට $\mathrm{Q} \equiv (x_0 + h, f(x_0 + h))$ වේ.

PQ ඡේදන රේඛාවේ බෑවුම m_{PQ} ලෙස නිරූපණය කරමු.

එවිට $m_{\mathrm{PQ}} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$ $h \neq 0$ සඳහා

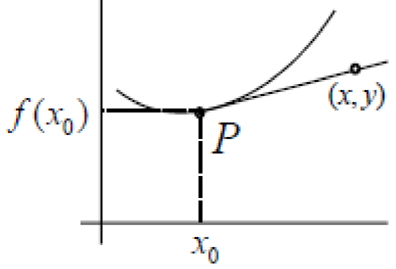
$= \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ $h \neq 0$ සඳහා

එවිට $m_{\mathrm{PQ}} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$ $h \neq 0$ සඳහා

$= \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ $h \neq 0$ සඳහා

$h \to 0$ විට $\lim m_{\mathrm{PQ}}$ තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් ලෙස පවතියි නම්, එය $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයට P හිදී ඇති ඇඳි ස්පර්ශක රේඛාවේ අනුක්‍රමණය m ලෙස අර්ථ දක්වයි.

$$m_{\mathrm{PQ}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



$y = f(x)$ වක්‍රයට P හි දී ඇඳි, බෑවුම m වූ ස්පර්ශක රේඛාවේ සමීකරණය,

$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$

2. ස්පර්ශක රේඛාවේ බෑවුම අර්ථ දැක්වීම සඳහා භාවිත කළ

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ යන සීමාවට නමක් සහ අංකනයක් ඇත. වෙනත් විවිධ අවස්ථාවල දී ද දක්නට ලැබෙන බැවින් එය $x = a$ හි දී $f(x)$ ව්‍යුත්පන්නය ලෙස හඳුන්වන අතර එය $x = x_0$ දී $f(x)$ අවකලනය යැයි ද එහි සීමාව (තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් ලෙස) පවතියි යැයි ද දී ඇති විට $f^1(x_0)$ ලෙස අංකනය කරයි.

සුදුසු උදාහරණ භාවිතයෙන් පහත අවස්ථාවල දී, $x = x_0$ දී $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය නොපවතින බව පැහැදිලි කරන්න.

(i) $x = x_0$ ඇතුළත් විවෘත ප්‍රාන්තරය තුළ f අර්ථ දක්වා නොමැති විට,

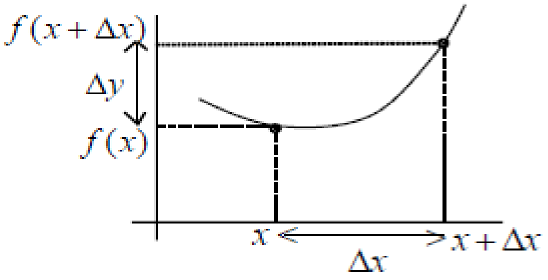
(ii) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ පරිමිත නොවන විට,

(iii) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ අර්ථ නොදැක්වෙන විට

එසේම සියලු x අගයන් සඳහා ව්‍යුත්පන්නය පවතින පරිදි වූ f ශ්‍රිතය $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්න ශ්‍රිතය ලෙස හඳුන්වයි.

එනම්, $(f^1)(x) = f^1(x)$ සහ $f^1(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

3. y යනු $y = \mathrm{f}(x)$ මගින් දෙනු ලබන x හි ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. ඕනෑ ම x අගයක් සලකමු. x සහ $x + \Delta x$ අන්ත ලක්ෂ්‍ය ලෙස පවතින සංවෘත ප්‍රාන්තරය තුළ x හි වෙනස් වීම Δx යැයි සලකමු.



x අගයේ වෙනස් වීම වන Δx ට අනුරූප y අගයේ වෙනස් වීම අංකනය කරන Δy යන්න $f(x+\Delta x)-f(x)$ ට සමාන වේ.

එම නිසා, x සහ $x+\Delta x$ අන්ත ලක්ෂ්‍ය ලෙස පවතින සංවෘත ප්‍රාන්තරය තුළ වූ x ට සාපේක්ෂ ව y වෙනස් වීමේ මධ්‍යක ශීඝ්‍රතාව $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ වේ.

මෙම $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ වේ. Δx යනු සංකේතයක් මිස එය Δ හා x හි ගුණිතයක් නොවේ, යන්න අවධාරණය කරන්න.

x ට සාපේක්ෂව y වෙනස් වීමේ ක්ෂණික ශීඝ්‍රතාව

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ලෙස අර්ථ දක්වයි.

සීමාව තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් ලෙස පවතී යැයි දී ඇති විට,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f^1(x)$ බව සඳහන් කරන්න.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ යන්න $\dfrac{dy}{dx}$ ලෙස ද අංකනය කරයි.

එමගින් $f^1(x)$ හා $\dfrac{dy}{dx}$ යන්න සමාන වේ.

නිපුණතා මට්ටම 14.2

1. n පරිමේය සංඛ්‍යාවක් වන විට x^n හි අවකලනය සහ මූලික ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල අවකලනය, ප්‍රමූලධර්ම මගින් සොයන ආකාරය පෙන්වා දෙන්න.

   - පහත ප්‍රතිඵල සාධනය කර ඉදිරිපත් කරන්න.

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

<u>නිපුණතා මට්ටම 14.3</u>

1. පහත සඳහන් ප්‍රතිඵල සාධනය කර පෙන්වන්න.

   (i) k නියතයක් විට $f(x)=k$ නම් $f'(x)=0$

   (ii) $f(x)=kg(x)$ නම් $f'(x)=kg'(x)$

   (iii) $f(x)=g(x)\pm h(x)$ නම් එවිට $f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$

   - $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$ ප්‍රතිඵලය සහ ඉහත ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් සුදුසු නිදසුන් කිහිපයක් සිසුනට පහදා දී ගැටලු විසඳීමට යොමු කරන්න.

2. (i) ගුණිත නීතිය

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)]=f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]+g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

   (ii) බෙදීමේ නීතිය

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]-[f(x)]\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2};\ g(x)\neq 0 \text{ විට}$$

   (iii) දාම නීතිය

   y යනු u හි ශ්‍රිතයක් ද u යනු x හි ශ්‍රිතයක් ද වන විට $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

   - දාම නීතිය හා එහි විස්තීරණයෙහි සාධනය අවශ්‍ය නොවේ.
   - ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳන්න.

<u>නිපුණතා මට්ටම 14.4</u>

1. (i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $-1<x<1$

   (ii) $\frac{d(\cos^{-1}x)}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $-1<x<1$

   (iii) $\frac{d(\tan^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$; $-\infty<x<\infty$ බව අපෝහනය කරන්න.

2. ඉහත සූත්‍ර භාවිතයෙන් විවිධ ශ්‍රිත අවකලනය කිරීමට සිසුන් යොමු කරන්න.

නිපුණතා මට්ටම 14.5

1. අපරිමිත ශ්‍රේණියක ඓක්‍යය වන $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$ යන්න e^x මගින් දක්වන බවත් එය ප්‍රකෘති ඝාතීය ශ්‍රිතය ලෙස හඳුන්වන බවත් ප්‍රකාශ කරන්න.
2. ප්‍රකෘති ඝාතීය ශ්‍රිතයේ වසම $\mathbb{R}$ ද පරාසය $(0,\infty)$ ද බව ප්‍රකාශ කරන්න.
3. $x=1$ විට, $e=e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$ ලෙස ලැබෙන බව ප්‍රකාශ කරන්න.

   e ධන අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් බවත් $e\simeq 2.718$ බවත් ප්‍රකාශ කරන්න.
4. (i) $e^0=1$

   (ii) $e^{x_1+x_2}=e^{x_1}e^{x_2}$

   (iii) $e^{x_1-x_2}=\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}$

නිපුණතා මට්ටම 14.6

1. $f(x)=e^x$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය ලෙස ප්‍රකෘති ලඝුගණක ශ්‍රිතය $\ln x$ හඳුන්වා දෙන්න.

   $\ln x$ යන්න $y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y$ ලෙස අර්ථ දක්වන්න.
2. $g(x)=\ln x$ නම් g හි වසම $(0,\infty)$ ද පරාසය $\mathbb{R}$ ද බව ප්‍රකාශ කරන්න.
3. (i) $x>0$ සඳහා පමණක් අර්ථ දක්වයි.

   (ii) $\ln(e^x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ සඳහා

   (iii) $e^{\ln x}=x$; $x>0$ සඳහා

   (iv) $\ln(xy)=\ln x+\ln y,\ x>0,\ y>0$ සඳහා

   (v) $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y,\ x>0,\ y>0$ සඳහා

   (vi) $\ln(x^b)=b\ln x,\ x>0$ යන ගුණ ඉදිරිපත් කරන්න.
4. ප්‍රතිලෝම ගුණ භාවිතයෙන් $y=\ln x$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
   - $y=x$ මත $y=e^x$ හි දර්පණ ප්‍රතිබිම්බය ලෙස $y=\ln x$ හි ප්‍රස්තාරය ලැබෙන බව පහදන්න.

5. $a>0$ සඳහා a^x ශ්‍රිතය $a^x=e^{x\ln a}$ ලෙස අර්ථ දක්වන්න.

6. $h(x)=a^x$ නම් h හි වසම $\mathbb{R}$ ද පරාසය $h=(0,\alpha)$ ද බව පෙන්වා දෙන්න.

7. ප්‍රකෘති ලඝුගණක ශ්‍රිතය ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.

8. $x>0$ සඳහා $\ln x$ හි ව්‍යුත්පන්නය $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$ බව අපෝහනය කරන්න.

9. $\frac{d}{dx}(a^x)=(\ln a)a^x$ බව අපෝහනය කරන්න.

10. x හි ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.

<u>නිපුණතා මට්ටම 14.7</u>

1. $f(x,y)=0$ ආකාරයේ සමීකරණයක් තෘප්ත කරන $y=f(x)$ ශ්‍රිතයක් අධ්‍යාහෘත ශ්‍රිතයක් ලෙස අර්ථ දක්වයි.
   $x^2+y^2-1=0$ මගින් මෙය පැහැදිලි කරන්න.
2. $f(x,y)=0$ සමීකරණය මගින් අර්ථ දැක්වෙන $y=f(x)$ අධ්‍යාහෘත ශ්‍රිතයක ව්‍යුත්පන්නය ලබා ගැනීම සඳහා x ඇසුරින් y සඳහා අධ්‍යාහෘතයක් ලබාගෙන ඉන්පසු ව්‍යුත්පන්නය ලබා ගන්න. (මෙහි දී $f(x,y)=0$ විසඳීම අවශ්‍ය නොවන අතර එය සමහර අවස්ථාවල කිරීමට ද නොහැකිය) ඒ වෙනුවට අපි $f(x,y)=0$ හි

දෙපස ම දාම නීතිය මගින් අවකලනය කරමු. උදාහරණ භාවිතයෙන් විස්තර කරන්න.

t පරාමිතයක් විට C වක්‍රයක් $x=f(t)$ සහ $y=f(t)$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් අර්ථ දක්වයි.

එවිට $\frac{dy}{dx}$ ව්‍යුත්පන්නය $\frac{dx}{dt}\neq 0$ සඳහා වන ලක්ෂ්‍යවල දී $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$ ලෙස ලබා ගත හැකි ය.

$\frac{dx}{dt}\neq 0$ විට $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$ බව ද පෙන්වා දෙන්න. උදාහරණ මගින් පැහැදිලි කරන්න.

3. පරාවලය $y^2 = 4ax$, ඉලිප්සය $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, බහුවලය $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $xy=c^2$ වැනි අව්‍යක්ත ශ්‍රිත හා පරාමිතික සමීකරණ ඇතුළත් වන අවකලන ඉදිරිපත් කරන්න.

$y^2 = 4ax$: $x = at^2, y = 2at$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$

$xy = c^2$: $x = ct, y = \frac{c}{t}$

4. ඉහත වක්‍ර ද ඇතුළත් ව පරාමිතික ආකාරයෙන් අර්ථ දක්වන ලද වක්‍ර මත ලක්ෂ්‍යවල දී ස්පර්ශකයේ සහ අභිලම්බයේ සමීකරණ ලබා ගන්න.
ඉහත සඳහන් වක්‍රවල දළ සටහන් අඳින අයුරු සහ ඒවායේ මූලික ගුණ පැහැදිලි කරන්න.

නිපුණතා මට්ටම 14.8

1. y යනු x හි ශ්‍රිතයක් විට y හි n වන ගණයේ ව්‍යුත්පන්න ලෙස හැඳින්වෙන්නේ y ශ්‍රිතය x විෂයෙන් n වාරයක් අවකලනය කිරීමෙන් ලැබෙන ශ්‍රිතයයි. එ
$\frac{d^n y}{dx^n}$ හෝ $f^n(x)$ හෝ y^n මගින් නිරූපණය කරයි.
2. උදහරණ මගින් පැහැදිලි කරන්න.
3. ඉහළ ගණවල ව්‍යුත්පන්න ඇතුළත් ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.