ගණිතය

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) ගණිතය හදාරන
ආරම්භකයින් සඳහා වූ
පදනම් පාඨමාලාව

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
මහරගම
ශ්‍රී ලංකා
2010

පටුන

වීජ ගණිතය

		පිටු අංකය
1.	ද්විපද ප්‍රසාරණය	1
2.	සාධක සෙවීම	5
3.	වීජීය භාග	11
4.	සමීකරණ	17
5.	දර්ශක සහ ලඝුගණක	37
6.	අනුපාත සහ සමානුපාත.....	45

ජ්‍යාමිතිය

7.	වෘත්ත හා සම්බන්ධ සෘජුකෝණාස්‍ර	51
8.	පයිතගරස් ප්‍රමේයය සහ එහි විස්තීරණය	54
9.	සමච්ඡේදක ප්‍රමේයය	58
10.	වර්ගඵලය - (සමරූපී ත්‍රිකෝණ)	61
11.	ත්‍රිකෝණ හා සම්බන්ධ සංගාමිතාව	63
12.	පිළිතුරු	67

අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්ගේ පණිවිඩය

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර සාමාන්‍ය පෙළ විභාගය සමත් ව අ.පො.ස. (උ.පෙළ) ගණිතය විෂය ධාරාවට පිවිසෙන සිසුන් සඳහා පෙර සූදානම්වීමක් ලෙස අ.පො.ස. (උසස් පෙළ) ගනිතයට හදාරන ආරම්භකයින් සඳහා වූ පදනම් පාඨමාලාව නම් වූ මෙම පොත සකස් කර ඇත.

මෙම පොතෙහි වැදගත් ම ලක්ෂණය වන්නේ පොත පරිශීලනයෙන් අ.පො.ස. (උ.පෙළ) ගණිත විෂය හැදෑරීමට පැහැදිලි අවබෝධයක් ලබාගත හැකිවීමත් ඒ සඳහා ස්වයං විශ්වාසයක් තමා තුළ ගොඩනගා ගත හැකි වීමත් ය.

මෙම පොතෙහි සෑම පරිච්ඡේදයක් ම ජාතික විෂයමාලාවට අනුකූල ව පැහැදිලි හා එය පෝෂණය වන අයුරින් ලියා දක්වා ඇත. මෙ මගින් සිසුන්ට ඉක්මණින් හා පහසුවෙන් විෂය ග්‍රහණය කර ගැනීමට අත්වැලක් සපයන අතර ම ස්වයං ඉගෙනුමකට මග පාදා ඇත.

මෙම පොත සිසුන්ට මෙන් ම ගුරුවරුන්ට ද මහඟු සේ උපකාරී වනු ඇති බව මගේ විශ්‍ාසයයි.

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ඉදිරියේ දී ද මෙවැනි පොත් ප්‍රකාශයට පත් කරනු ඇතැයි මම බලාපොරොත්තු වෙමි.

ආචාර්ය උපාලි සේදර
අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

සංඥාපනය

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර උසස් පෙළ ගණිතය හදාරන ආරම්භකයින් සඳහා වූ පද0නම් පාඨමාලාව නැමැති මෙම ග්‍රන්ථය අ.පො.ස. (උසස් පෙළ) සංයුක්ත ගණිතය හැදෑරීමට අපේක්ෂිත සිසුන්ගේ අවශ්‍යතාවක් පදනම්කර ගනිමින් ලියා ඇත.

සියලු මූලික සිද්ධාන්ත සහ සංකල්ප කෙරෙහි අවධානය යොමුකර ඒ ආශ්‍රිත ගැටළු විසඳීමට අවශ්‍ය අවබෝධය ලබාදීමත් අභ්‍යාස කිරීමට සිසුන් පුහුණු කිරීමත් මෙහි අරමුණයි.

මෙහි වැදගත් ම ලක්ෂණය වන්නේ අ.පො.ස. (සා.පෙළ) ප්‍රතිඵල අපේක්ෂිත සිසුන් ස්වයං ඉගෙනුමකට යොමු කිරීම සඳහා පොත සකස්කර තිබිමයි.

ගැටළු විසඳීම තුළින් සිසුන් තුළ ස්වයං ඉගෙනුමටක පෙළඹුමක් ඇති කරලීම මෙහි වැදගත් ම ලක්ෂණයයි. මෙහි දී වීජ ගණිතය කෙරෙහි වඩාත් අවධානයක් යොමුකර ඇත.

පොතෙහි වැඩිදියුණුව සඳහා ඔබගේ යම් යෝජනාවක් අදහසක් හෝ විවේචනයක් ඇත්නම් ඉදිරි සංස්කරණ වෙනුවෙන් ඒවා සාදරයෙන් පිළි ගැනීමට අපේක්ෂා කරමි.

1. වීජ ගණිතය

1. ද්විපද ප්‍රසාරණය

$(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)^3$ සහ $(a-b)^3$ යන ඒවායේ ප්‍රසාරණයන්, ඔබ අ.පො.ස. සාමාන්‍ය පෙළ විෂය නිර්දේශය යටතේ ඉගෙන ගෙන ඇත. දැන් අපි නැවත එම ප්‍රසාරණයන් සිහිපත් කර ගනිමු.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= (a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2 \quad \text{———} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a(a-b)-b(a-b)\\ &= a^2-ab-ab+b^2\\ &= a^2-2ab+b^2 \quad \text{———} \quad (2)\end{aligned}$$

හෝ

ඉහත (1) හි ලබාගත් ප්‍රතිඵලයට $b=-b$ ආදේශයෙන්

$$[a+(-b)]^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad \text{———} \quad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)[a^2-2ab+b^2]\\ &= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad \text{———} \quad (4)\end{aligned}$$

හෝ

ඉහත (3) හි ලබාගත් ප්‍රතිඵලයට $b=-b$ ආදේශයෙන්

$$[a+(-b)]^3 = a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

ඉහත ප්‍රසාරණවලට ද්විපද ප්‍රසාරණ යැයි කියනු ලැබේ.

ඉහත (1) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතා කර $(a+b+c)^2$ හි ප්‍රසාරණය ලියමු.

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 \\
&= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca
\end{aligned}
$$

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳමු.

උදාහරණ 1

ප්‍රසාරණය කර ලියන්න.

(i) $(2x+3y)^2$ (ii) $(2xy-5z)^2$

(iii) $(3x+2y)^3$ (iv) $\left(ab-\frac{2}{c}\right)^3$

(v) $(a+b-c)^2$

(i) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 3y + (3y)^2$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

(ii) $(2xy-5z)^2 = (2xy)^2 - 2\times 2xy\times 5z + (5z)^2$

$= 4x^2y^2 - 20xyz + 25z^2$

(iii) $(3x+2y)^3 = (3x)^3 + 3\times(3x)^2\times(2y) + 3\times(3x)\times(2y)^2 + (2y)^3$

$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

(iv) $\left(ab-\frac{2}{c}\right)^3 = (ab)^3 - 3(ab)^2\times\frac{2}{c} + 3(ab)\left(\frac{2}{c}\right)^2 - \left(\frac{2}{c}\right)^3$

$= a^3b^3 - \frac{6a^2b^2}{c} + \frac{12ab}{c^2} - \frac{8}{c^3}$

(v) $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

උදාහරණ 1.2

$a + b = 4$ සහ $ab = 5$ ලෙස දී ඇත්නම්,

(i) $a^2 + b^2$ සහ (ii) $a^3 + b^3$ අගයන්න.

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$= 4^2 - 2 \times 5 = 16 - 10 = 6$

(ii) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$

$= (a + b)^3 - 3ab\,(a + b)$

$= 4^3 - 3 \times 5 \times 4$

$= 64 - 60 = 4$

අභ්‍යාසය 1

පහත සඳහන් ප්‍රකාශනවල ප්‍රසාරණයන් ලියන්න.

1. $(2a + 3b)^2$
2. $(3a - 4b)^2$
3. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$
4. $(2xy + 5z)^2$
5. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$
6. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$
7. $\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2$
8. $\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{b}\right)^2$
9. $(4xy - 3z)^2$
10. $(a + 2b)^3$
11. $(2a - b)^3$
12. $(3a + 2b)^3$
13. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$
14. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$
15. $(ab - 2c)^3$
16. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3$
17. $\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{b}\right)^3$
18. $(2xy - 3z)^3$
19. $(a + b + c)^2$
20. $(a + b - c)^2$
21. $(a - b + c)^2$
22. $(a - b - c)^2$
23. $(a - 2b + c)^2$
24. $(a - b - 2c)^2$
25. ද්විපද ප්‍රසාරණය භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

    (i) 101^3 (ii) 198^3 (iii) 401^3 (iv) 999^3

26. ද්විපද ප්‍රසාරණ පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

    (i) $101^2 + 2 \times 101 \times 99 + 99^2$ (ii) $88^2 - 2 \times 88 \times 87 + 87^2$

27. ද්විපද ප්‍රසාරණ පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

(a) $51^3 + 3 \times 51^2 \times 49 + 3 \times 51 \times 49^2 + 49^3$

(b) $101^3 - 3 \times 101^2 \times 99 + 3 \times 101 \times 99^2 - 99^3$

28. පහත සඳහන් ප්‍රකාශන සත්‍ය බව පෙන්වන්න. (එනම්, සත්‍යාපනය කරන්න.)

(i) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2 (a^2 + b^2)$

(ii) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

(iii) $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a (a^2 + 3b^2)$

(iv) $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b (3a^2 + b^2)$

29. $x+\frac{1}{x} = a$ නම්, (*a*) $x^2+\frac{1}{x^2}$ සහ (b) $x^3+\frac{1}{x^3}$ a ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

30. $x - y = 4$ සහ $xy = 21$ නම්, $x^3 - y^3$ අගය සොයන්න.

31. $(x + y) = -\frac{1}{3}$ නම්, $x^3 + y^3 - xy$ හි අගය සොයන්න.

32. $a - \frac{1}{a} = - 5$ නම්, $a^3-\frac{1}{a^3} - 200$ හි අගය සොයන්න.

33. $= 4$ නම්, $\frac{x^6-1}{x^3} = 76$ බව පෙන්වන්න.

34. $\frac{a^2-1}{a} = 2$ නම්, $\frac{a^6-1}{a^3}$ හි අගය සොයන්න.

35. $a + b - 3 = 0$ නම්, $a^3 + b^3 + 9ab - 26$ හි අගය සොයන්න.

36. $a + b - 7 = 0$ සහ $ab = 12$ නම්, $a^3 + b^3 + 4ab(a + b)$ හි අගය සොයන්න.

37. $p = 2q + 4$ නම්, $p^3 -8q^3 - 24pq = 64$ බව පෙන්වන්න.

38. $a + b + \mathrm{c} = 0$ නම්, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ බව පෙන්වන්න.

39. $p + q = 1 + pq$ නම්, $p^3 + q^3 = 1 + p^3q^3$ බව පෙන්වන්න.

40. $ab(a + \mathrm{b}) = p$ නම්, $a^3 + b^3 + 3p = \frac{p^3}{a^3b^3}$ බව පෙන්වන්න.

2. සාධක සෙවීම

2. වීජීය ප්‍රකාශනවල සාධක සෙවීම

2.1 ත්‍රිපද ප්‍රකාශන

ත්‍රිපද ප්‍රකාශන සඳහා උදාහරණ කිහිපයක්

$x^2 - 5x - 6$, $2x^3 - 5x^2 - 3x$

$3x^2 - 5xy - 2y^2$

උදාහරණ 2.1

$x^2 - 5x - 6$ හි සාධක සොයන්න.

$= x^2 - 6x + x - 6$

$= x(x-6) + 1(x - 6)$

$= (x - 6)(x + 1)$

උදාහරණ 2.2

$2x^3 - 5x^2 - 3x$ සාධකවලට වෙන් කරන්න.

$= x[2x^2 - 5x - 3]$

$= x[2x^2 - 6x + x - 3]$

$= x[2x(x - 3) + 1(x - 3)]$

$= x[(x - 3)(2x + 1)]$

$= x(x - 3)(2x + 1)$

උදාහරණ 2.3

$3x^2 - 4xy - 4y^2$ හි සාධක සොයන්න.

$= 3x^2 - 6xy + 2xy - 4y^2$

$= 3x(x - 2y) + 2y(x - 2y)$

$= (x - 2y)(3x + 2y)$

උදාහරණ 2.4

සාධක සොයන්න. $2(x + 3)^2 - 7(x + 3) - 4$

$x + 3 = a$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $= 2a^2 - 7a - 4$

$= 2a^2 - 8a + a - 4$

$= 2a(a - 4) + 1(a - 4)$

$= (2a + 1)(a - 4)$

$= [2(x + 3) + 1][x + 3 - 4]$

$= (2x + 7)(x - 1)$

උදාහරණ 2.5

$2\,(2a + b)^2 - 5\,(2a + b)\,(a - 2b) - 3\,(a - 2b)^2$ හි සාධක සොයන්න.

$x = 2a + b$ ද $y = a - 2b$ ද යැයි ගනිමු.

එවිට $= 2x^2 - 5xy - 3y^2$

$= 2x^2 - 6xy + xy - 3y^2$

$= 2x\,(x - 3y) + y\,(x - 3y)$

$= (x - 3y)\,(2x + y)$

$= [\,(2a + b) - 3(a - 2b)]\;[\,2(2a + b) + (a - 2b)]$

$= (7b - a)\,5a = 5a\,(7b - a)$

2.2 වර්ග දෙකක අන්තරය

$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$

$= a\,(a - b) + b\,(a - b)$

$= (a - b)\,(a + b)$

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)}}$$

උදාහරණ 2.6

$a^3b - ab^3$ හි සාධක සොයන්න.

$= ab\,(a^2 - b^2)$

$= ab\,(a - b)\,(a + b)$

උදාහරණ 2.7

සාධක සොයන්න. $x^4 - 1$

$= (x^2)^2 - 1^2$

$= (x^2 - 1)\,(x^2 + 1)$

$= (x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 + 1)$

උදාහරණ 2.8

$a^4 + 4b^4$ සාධකවලට වෙන් කරන්න.

$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$

$= (a^2 + 2b^2 - 2ab)\,(a^2 + 2ab + b^2)$

උදාහරණ 2.9

$1 - a^2 + 2ab - b^2$ හි සාධක සොයන්න.

$= 1 - (a^2 - 2ab + b^2)$

$= 1^2 - (a - b)^2$

$= [1 - (a - b)]\;[1 + (a - b)]$

$= (1 - a + b)\,(1 + a - b)$

2.2 $a^3 + b^3$ සහ $a^3 - b^3$ හි සාධක සෙවීම

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ හි ගුණිතය සලකමු.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$
$$\therefore \; a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

මෙලෙසම $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ සුළු කිරීමෙන් $a^3 - b^3$ ලැබේ.

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$$
$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - b^3$$
$$\therefore \; a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

උදාහරණ 2.10

$81x^3 - 3y^3$ හි සාධක සොයන්න.

$$= 3\,[27x^3 - y^3)$$
$$= 3\,[\,(3x)^3 - y^3\,]$$
$$= 3\,(3x - y)\,[\,(3x)^2 + 3x \times y + y^2\,]$$
$$= 3\,(3x - y)\,(9x^2 + 3xy + y^2)$$

උදාහරණ 2.11

$x^3 + \frac{1}{x^3}$ සාධක සොයන්න.

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$$
$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

උදාහරණ 2.12

$x^3 - \frac{1}{x^3}$ සාධක සොයන්න.

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left[x^2 + x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right]$$
$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

උදාහරණ 2.13

$8a^3 + (b+c)^3$ හි සාධක සොයන්න.

$$8a^3 + (b+c)^3 = (2a)^3 + (b+c)^3$$
$$= [\,2a + (b+c)]\ [\,(2a)^2 - 2a\ (b+c)\ + (b+c)^2\,]$$
$$= (\,2a + b + c)\ (\,4a^2 - 2ab - 2ac\ + b^2 + 2bc + c^2\,)$$
$$= (\,2a + b + c)\ (\,4a^2 + b^2 + c^2\ - 2ab\ - 2ac + 2bc\,)$$

උදාහරණ 2.14

සාධක සොයන්න. $a^3 - 27(b-c)^3$

$$a^3 - 27(b-c)^3 = a^3 - \{3(b-c)\}^3$$
$$= [\,a - 3\,(b-c)]\ [\,a^2 + 3a\,(b-c)\ + 9\,(b-c)^2\,]$$
$$= (\,a - 3b + 3c)\ (\,a^2 + 9b^2 + 9c^2\ + 3ab - 3ac - 18bc\,)$$

උදාහරණ 2.15

(i) $(a+b)^3 + c^3$ හි සාධක සොයන්න.

(ii) $(a+b)^3$ හි ප්‍රසාරණය ලියා එමගින් $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ බව පෙන්වන්න.

(iii) ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන්, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ හි සාධක සොයන්න.

(i) $(a+b)^3 + c^3 = [(a+b) + c\,]\,[(a+b)^2 - c\,(a+b) + c^2\,]$

$= (a+b+c)\ \ (a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2)$

$= (\,a + b + c)\ \ (a^2 + b^2 + c^2\ + 2ab\ - ac - bc\,)$

(ii) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^3 - 3a^2 b - 3ab^2 = a^3 + b^3$

$(a+b)^3 - 3ab\,(a+b) = a^3 + b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab\,(\,a + b)$

(iii) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$; [ඉහත (ii) න්]

$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - 3abc$

$= [(a+b) + c]\ [(a+b)^2 - c\,(a+b) + c^2\,] - 3ab[a+b+c]$; [ඉහත (i) න්]

$= (a+b+c)\ (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ac - bc) - 3ab\ (a+b+c)$

$= (a+b+c)\ (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

අභ්‍යාසය 2.1

සාධක සොයන්න.

1.	$x^2 - x - 6$	2.	$x^2 + 4x - 96$
3.	$x^2 + 5x - 6$	4.	$x^2 - 4x - 12$
5.	$x^2 + x - 42$	6.	$x^2 - 9x + 18$
7.	$2x^2 + 5x + 3$	8.	$2x^2 - 5x + 3$
9.	$2x^2 + 5x - 3$	10.	$2x^2 - 5x - 3$
11.	$10 - 7x - 12x^2$	12.	$15 + x - 2x^2$
13.	$18x^2 - 33x - 216$	14.	$6x^2 - 55x + 126$
15.	$2x^2 - 5xy + 3y^2$	16.	$6x^2 - 5xy - 6y^2$
17.	$4x^2 + 8xy + 3y^2$	18.	$2a^2 - 27ab + 13b^2$
19.	$40x^2y^2 + 49xy - 24$	20.	$32x^2 - 36xy - 35y^2$
21.	$24a^3 - 17a^2b - 20ab^2$	22.	$18a^3 - 3a^2b - 10ab^2$
23.	$(a^2 - 3a)^2 - 38(a^2 - 3a) - 80$	24.	$(a + b + c)^2 - 3(a + b + c) - 28$
25.	$2(x+y)^2 - 3(x+y) - 27$	26.	$2(2x+y) - 5(2x+y)(x-2y) + 3(x-2y)^2$
27.	$x^2 + x - (a-1)(a-2)$	28.	$x^2 - x - (a-1)(a-2)$
29.	$x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1$	30.	$x^2 + 2ax + (a+b)(a-b)$
31.	$ax^2 + (ab-1)x - b$	32.	$x^2 + ax - (6a^2 - 5ab + b^2)$
33.	$4(a^2 - b^2)^2 - 8ab(a^2 - b^2) - 5a^2b^2$		
34.	$10(a+2b)^2 + 21(a+2b)(2a-b) - 10(2a-b)^2$		
35.	$6(x + y)^2 - 5(x^2 - y^2) - 6(x-y)^2$		

අභ්‍යාසය 2.2

සාධක සොයන්න.

1.	$x^2 - 4y^2$	2.	$x^3 - x$	3.	$x^2 - \frac{1}{x^2}$
4.	$x^5 - x$	5.	$4 - 9a^2$	6.	$(a-4b)^2 - 9b^2$
7.	$16 - (a+b)^2$	8.	$9 - (a-b)^2$	9.	$12a^3 - 3ab^2$
10.	$1 - (a-b)^2$	11.	$1 - (a+b)^2$	12.	$x^2 - y^2 - x - y$
13.	$x^2 - y^2 - x + y$	14.	$x^2 - y^2 + x + y$	15.	$x^2 - y^2 + x - y$
16.	$a^2 - b^2 - 4a + 4b$	17.	$a^2 - b^2 - 4a + 4$	18.	$ab + ac - (b+c)^2$
19.	$a(a+1) - b(b+1)$	20.	$x^4 - 3x^2y^2 + y^4$	21.	$x^4 + x^2y^2 + y^4$
22.	$a^4 + 5a^2b^2 + 9b^4$	23.	$x^2 - 4xy + 4y^2 - z^2$	24.	$4a^2 + b^2 - x^2 + 4ab$
25.	$x^4 + x^2 + 1$	26.	$4a^4 + 11a^2b^2 + 9b^4$		

සාධක පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

1.	$100^2 - 99^2$	2.	$94^2 - 36$	3.	$12.38^2 - 7.62^2$
4.	$6.2^2 - 3.8^2$	5.	$100 \times 99 + 1$	6.	$11.7 \times 9.3 + 8.3 \times 9.3$
7.	$\sqrt{148 \times 140 + 16}$	8.	$319^2 - 318 \times 320$	9.	$12.5^2 - 13 \times 12$
10.	103×97				

අභ්‍යාසය 2.3

සාධක සොයන්න.

1.	$a^3 + 8b^3$	2.	$27a^3 - b^3$	3.	$125a^3 - 64b^3$
4.	$8a^3b^3 - c^3$	5.	$x^3 + \frac{1}{x^3}$	6.	$x^3 - \frac{1}{x^3}$
7.	$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$	8.	$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}$	9.	$a^3 + (b+c)^3$
10.	$a^3 + (b-c)^3$	11.	$a^3 - (b-c)^3$	12.	$8x^3 + (2y-x)^3$
13.	$(a+b)^3 + (a-b)^3$	14.	$(a+b)^3 - (a-b)^3$	15.	$8(a+b)^4 + (a+b)$
16.	$x^6 - y^6$	17.	$x^6 + y^6$	18.	$x^6 - 27$

19. (a) $(a+b)^3 + c^3$ හි සාධක සොයන්න.

(b) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ බව පෙන්වන්න.

(c) ඉහත (a) හා (b) හි ලත් ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ හි සාධක සොයන්න.

එනයින්, පහත සඳහන් බහුපදවල සාධක සොයන්න.

(i) $x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz$

(ii) $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$

(iii) $x^3 + 8y^3 - 27z^3 + 18xyz$

(iv) $a^3 - 28b^3 - 9ab^2$

(v) $8a^3 + b^3 - 1 + 6ab$

20. (i) $a = b + c$ නම්, $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $a + b + c = 0$ නම්, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $z = 2x - 3y$ නම්, $8x^3 - 27y^3 - z^3 = 18xyz$ බව පෙන්වන්න.

21. $x + y + z = 0$ බව දී ඇත. $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ බව පෙන්වන්න. එනයින් පහත සඳහන් වීජීය බහුපදවල සාධක සොයන්න.

(i) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

(ii) $(2x - 3y)^3 + (3y - 4z)^3 + 8(2z-x)^3$

(iii) $a^3(b-c)^3 + b^3(c-a)^3 + c^3(a-b)^3$

(iv) $(x - 3y)^3 + (3y - 4z)^3 + (4z - x)^3$

3. වීජීය භාග

3.1 කුඩා ම පොදු ගුණාකාරය (කු.පො.ගු)

එක් එක් බහුපදය ඒවායේ සාධකවල ගුණිතයන් ලෙස ලියා ගැනීමෙන්, සරල බහුපදවල කුඩා ම පොදු ගුණාකාරය පහසුවෙන් සොයාගත හැකි ය.

උදාහරණ 3.1

$8x^3$, $12x^5$, සහ $18x^7$ හි කු. පො. ගු. සොයන්න.

$8x^3 = 2^3 \times x^3$

$12x^5 = 2^2 \times 3 \times x^5$

$18x^7 = 2 \times 3^2 \times x^7$

$\therefore$ කු. පො. ගු. $= 2^3 \times 3^2 \times x^7 = 72x^7$

උදාහරණ 3.2

$2x^2 - 8, 3x^2 + 3x - 6$ සහ $6x^2 - 6x - 12$ හි කු. පො. ගු. සොයන්න.

$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x-2)(x+2)$

$3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2) = 3(x+2)(x-1)$

$6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$

කු. පො. ගු. $= 6(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$

වීජීය භාග සුළු කිරීම

උදාහරණ 3.3 $\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$ සුළු කරන්න.

පළමුවෙන් ම $(x^2 - 1)$ සහ $(x-1)^2$ හි කු. පො. ගු. සොයමු.

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$(x-1)^2 = (x-1)^2$

කු. පො. ගු. $= (x-1)^2 (x+1)$

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-1) - 3(x+1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{-x-5}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{-(x+5)}{(x-1)^2(x+1)}$$

උදාහරණ 3.4

සුළු කරන්න..

$$\frac{2}{1+x}+\frac{1}{x-1}+\frac{3x}{1-x^2}$$

$$= \frac{2}{1+x}-\frac{1}{1-x}+\frac{3x}{1-x^2}$$

$$= \frac{2}{1+x}-\frac{1}{1-x}+\frac{3x}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{2(1-x)-(1+x)+3x}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

උදාහරණ 3.5

සුළු කරන්න. $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+x-6}-\frac{2}{x^2+5x+6}$

$$= \frac{1}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{(x+3)(x-2)}-\frac{2}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x+3+x+2-2(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{9}{(x-2)(x+2)(x+3)}$$

උදාහරණ 3.6

සුළු කරන්න. $\frac{3x}{2-3x+x^2}+\frac{4}{1-x}-\frac{6}{2-x}$

$$= \frac{3x}{(2-x)(1-x)}+\frac{4}{1-x}-\frac{6}{2-x}$$

$$= \frac{3x+4(2-x)-6(1-x)}{(2-x)(1-x)}$$

$$= \frac{2+5x}{(2-x)(1-x)}$$

උදාහරණ 3.7

$$\frac{a+2}{a-2}+\frac{4}{4-a^2}-1$$

$$=\frac{a+2}{a-2}-\frac{4}{a^2-4}-1$$

$$=\frac{a+2}{a-2}-\frac{4}{(a-2)(a+2)}-1$$

$$=\frac{(a+2)^2-4-(a-2)(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

$$=\frac{a^2+4a+4-4-(a^2-4)}{(a-2)(a+2)}$$

$$=\frac{4(a+1)}{(a-2)(a+2)}$$

උදාහරණ 3.8 සුළු කරන්න $\dfrac{1}{4-\dfrac{3}{2+\dfrac{x}{1-x}}}$

$$=\frac{1}{4-\dfrac{3}{\dfrac{2(1-x)+x}{1-x}}}$$

$$=\frac{1}{4-\dfrac{3}{\dfrac{2-x}{1-x}}}$$

$$=\frac{1}{4-\dfrac{3(1-x)}{2-x}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{4(2-x)-3(1-x)}{(2-x)}}=\frac{1}{\dfrac{8-4x-3+3x}{2-x}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{5-x}{2-x}} \qquad =\frac{2-x}{5-x}$$

උදාහරණ 3.9

සුළු කරන්න.

$$\frac{x^2-25}{x^2+3x-10}\times\frac{x^2-4}{x^2-3x-10}\times\frac{x+1}{x^2+3x}$$

$$= \frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)(x-2)}\times\frac{(x-2)(x+2)}{(x-5)(x+2)}\times\frac{x+1}{x(x+3)}$$

$$= \frac{x+1}{x(x+3)}$$

උදාහරණ 3.10

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-3)}\div\frac{x^2-1}{2x^2-6x}$$

$$= \frac{x^2-3x+2}{(x-3)}\times\frac{2x^2-6x}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}\times\frac{2x(x-3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2x(x-2)}{x+1}$$

උදාහරණ 3.11

$x=\dfrac{1+y}{2y-1}$ සහ $y=\dfrac{1+2z}{1-z}$ ලෙස දී ඇත්නම් z යන්න x ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$x=\dfrac{1+y}{2y-1}$ හා $y=\dfrac{1+2z}{1-z}$ වලින් y ඉවත් කිරීමෙන්,

$$x=\frac{1+\dfrac{1+2z}{1-z}}{2\left(\dfrac{1+2z}{1-z}\right)-1}$$

$$x=\frac{\dfrac{(1-z)+(1+2z)}{1-z}}{\dfrac{2(1+2z)-(1-z)}{1-z}}$$

$$x=\frac{\frac{2+z}{1-z}}{\frac{1+5z}{1-z}}$$

$$x=\frac{2+z}{1+5z}$$

$$x(1+5z)=2+z$$
$$x+5xz \quad =2+z$$
$$z(5x-1)=2-x$$
$$z \quad =\frac{2-x}{5x-1}$$

අභ්‍යාසය 3

සුළු කරන්න.

1. $\frac{x}{2x-6}+\frac{3}{6-2x}+\frac{x}{2}$

2. $\frac{6}{x^2+2x-8}+\frac{7}{10-3x-x^2}$

3. $\frac{3}{x^2+2x-15}-\frac{1}{x^2-x-6}-\frac{2}{x^2+7x+10}$

4. $\frac{2x}{x^2-2x-3}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-4x+3}$

5. $x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^2-3x-2}{x^2-1}$

6. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-3x+2}$

7. $\frac{1}{2x-1}-\frac{2x}{4x^2-1}-\frac{1}{2x^2-3x+1}$

8. $\frac{a-2}{a^2-9a+20}-\frac{a+2}{a^2-a-12}$

9. $\frac{a-2}{a+2}+\frac{a+2}{a-2}-\frac{a^2+4}{a^2-4}$

10. $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{2x^2-6x+4}+\frac{3}{2x^2-2x-4}$

11. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{bc}{(c-a)(c-b)}$

12. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}-\frac{(a-b)^2}{(x-a)(x-b)}$

13. $\frac{a^2+3a+2}{a^2-4a-12}\times\frac{a^2-7a+6}{a^2-4}$

14. $\frac{a^3+b^3}{a(a^2-b^2)}\times\frac{a+b}{a-b}\times\frac{a^2-ab}{(a+b)^2}$

15. $\frac{1}{a^2+ab+b^2}\times\frac{2a}{a^3+b^3}\times\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{4a^2}$

16. $\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a+1}{a}\right)\div\left(\frac{a}{a+1}-\frac{a-1}{a}\right)$

17. $\left(2-\frac{y^2+z^2-x^2}{yz}\right)\div\left(2+\frac{x^2+y^2-z^2}{xy}\right)$

18. $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$

19. $y=x+\frac{1}{x}$ සහ $z=y-\frac{1}{y}$, z,x ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

20. $y=\frac{1-t}{1+t}$ නම්, $\frac{1-y^2}{1+y^2}$, t ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

21. $x=\frac{1+a}{1-a}$ සහ $y=\frac{1-a}{1+a}$ නම්, $\frac{x-y}{1+xy}$, a ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

22. $a=\frac{2b+1}{b-1}$ සහ $b=\frac{c+1}{2c-1}$ නම්, $\frac{2a+1}{a-1}$, c ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

4. සමීකරණ

4.1 ඒක විචල්‍ය සමීකරණ

සමීකරණ විසඳන විවිධ ආකාර කිහිපයක් මෙම පරිච්ඡේදයෙන් සාකච්ඡා කරමු.

4.1.1 සරල සමීකරණ

උදාහරණ 4.1

විසඳන්න.

$$\frac{3x+2}{x-1}-\frac{2(x-2)}{x+2}=1$$

$(x\text{-}1)$ හි සහ $(x+2)$ හි කු. පො. ගු. වන $(x\text{-}1)\,(x+2)$ න් දෙපස ම ගුණ කිරීමෙන්

$$(3x+2)(x+2)-2(x-2)(x-1)=(x-1)(x+2)$$

$$(3x^2+8x+4)-2(x^2-3x+2) \quad = x^2+x-2$$

$$x^2+14x=x^2+x-2$$

$$13x=-2$$

$$x=-\frac{2}{13}$$

4.1.2 වර්ගජ සමීකරණ

වර්ගජ සමීකරණයක වඩාත් සාධාරණ ආකාරය $ax^2+bx+c=0$ වේ. මෙහි a, b, c තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වන අතර $a \neq 0$ වේ.

වර්ග පූරණය භාවිතයෙන් $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$ සමීකරණයේ විසඳුම් සොයමු.

$$ax^2+bx+c=0; \qquad a \neq 0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \text{(දෙපස ම } a \text{ න් බෙදීමෙන්)}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

දෙපසට ම $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ එකතු කිරීමෙන් $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ හෝ } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

එනම් සමීකරණයේ මූල,

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ හෝ } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ හෝ වේ.}$$

උදාහරණ 4.2

පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

(a) $4x^2-4x-3=0$

(b) $3x^2-5x-1=0$

(a) $4x^2-4x-3=0$

මෙම සමීකරණය සාධක භාවිතයෙන් විසඳිය හැකි ය.

$4x^2-4x-3=0$

$4x^2-6x+2x-3=0$

$2x(2x-3)+1(2x-3)=0$

$(2x-3)(2x+1)=0$

$2x-3=0$ හෝ $2x+1=0$

$x=\frac{3}{2}$ හෝ $x=-\frac{1}{2}$

(b) $3x^2-5x-1=0$

මෙම සමීකරණය විසඳීමට වර්ග පූරණය භාවිත කරමු.

$3x^2-5x-1=0$

$3x^2-5x=1$

$x^2-\frac{5}{3}x=\frac{1}{3}$

$x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{-5}{6}\right)^2=\frac{1}{3}+\left(\frac{-5}{6}\right)^2$

$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{25}{36}=\frac{37}{36}$

$$x-\frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{37}}{6}$$

$$x=\frac{5+\sqrt{37}}{6} \text{ හෝ } \frac{5-\sqrt{37}}{6}$$

4.1.3 වර්ගජ සමීකරණ බවට ඌණනය කළ හැකි සමීකරණ

උදාහරණ 4.3

$(x^2+3x)^2-5(x^2+3x)-6=0$ විසඳන්න.

$y=x^2+3x$ ආදේශයෙන්,

$$y^2-5y-6=0$$

$$(y-6)(y+1)=0$$

$$y=6 \text{ හෝ } y=-1$$

$$x^2+3x=6 \text{ හෝ } x^2+3x=-1$$

$$x^2+3x-6=0 \qquad x^2+3x+1=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+24}}{2} \text{ හෝ } x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}, \text{ හෝ } x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\therefore$ සමීකරණයේ මූල වන්නේ

$$\frac{-3+\sqrt{33}}{2},\quad \frac{-3-\sqrt{33}}{2},\quad \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\quad \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

උදාහරණ 4.4

$\frac{4x+5}{x+5}+\frac{x+5}{4x+5}=\frac{10}{3}$ විසඳන්න.

$y=\frac{4x+5}{x+5}$ යැයි ගනිමු.

එවිට, $y=\frac{4x+5}{x+5}$ ඉහත සමීකරණයෙහි ආදේශයෙන්,

$$y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3}$$

$$3y^2-10y+3=0$$

$$(3y-1)(y-3)=0$$

$$y=\frac{1}{3} \text{ හෝ } y=3$$

$$\frac{4x+5}{x+5}=\frac{1}{3} \text{ හෝ } \frac{4x+5}{x+5}=3$$

$12x+15=x+5$ හෝ $4x+5=3(x+5)$

$11x=-10$ හෝ $4x+5=3x+15$

$x=\frac{-10}{11}$ හෝ $x=10$

$$x=\frac{-10}{11},\ 10$$

උදාහරණ 4.5

$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$ ආකාරයේ සමීකරණ

විසඳන්න. $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$

$x+\frac{1}{x}=y$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

$6(y^2-2)+35y+62=0$

$6y^2+35y+50=0$

$(2y+5)(3y+10)=0$

$y=-\frac{5}{2}$ හෝ $y=-\frac{10}{3}$

$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$ හෝ $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$

$2x^2+5x+2=0$ හෝ $3x^2+10x+3=0$

$(2x+1)(x+2)=0$ හෝ $(3x+1)(x+3)=0$

$x=-\frac{1}{2}$ හෝ $x=-2$ හෝ $x=-\frac{1}{3}$ හෝ $x=-3$

$\therefore$ දී ඇති සමීකරණයේ මූල වන්නේ, $-\frac{1}{2},\ -2,\ -\frac{1}{3},\ -3$

උදාහරණ 4.6

විසඳන්න. $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=8$

$y = x-\frac{1}{x}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $y^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2-2+\frac{1}{x^2}$

$y^2+4=x^2+2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

$\therefore$ දී ඇති සමීකරණය

$2(y^2+4)-3y=8$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

$2y^2-3y = 0$

$y(2y-3) = 0$

$y=0$ හෝ $y=\frac{3}{2}$

$x-\frac{1}{x}=0$ හෝ $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

$x^2-1=0$ හෝ $2x^2-3x-2=0$

$(x-1)(x+1)=0$ හෝ $(2x+1)(x-2)=0$

$x=1$ හෝ $x=-1$ හෝ $x=-\frac{1}{2}$ හෝ $x=2$

$\therefore$ දී ඇති සමීකරණයේ විසඳුම් කුලකය වන්නේ $\left\{-1,\ -\frac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$

වර්ගජ ආකාරයට ඌණනය කළ හැකි වෙනත් විවිධ සමීකරණ

උදාහරණ 4.7

පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

(a) $2^{2x}-3.2^{x+2}+32=0$

(b) $3^{x-2}+3^{3-x}=4$

(a) $2^{2x}-3.2^{x+2}+32=0$

$\left(2^x\right)^2-3\times2^2\times2^x+32=0$

$y = 2^x$ යැයි ගනිමු.

එවිට ඉහත සමීකරණය,

$y^2 - 12y + 32 = 0$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

$\Rightarrow \quad (y-8)(y-4) = 0$

$y = 8$ හෝ $y = 4$

$\Rightarrow \quad 2^x = 8$ හෝ $2^x = 4$

$2^x = 2^3$ හෝ $2^x = 2^2$

$x = 3$ හෝ $x = 2$

$\therefore$ ඉහත සමීකරණයයේ මූල $x = 3, 2$ වේ.

(b) $3^{x-2} + 3^{3-x} = 4$

$3^x \times \frac{1}{3^2} + 3^3 \times \frac{1}{3^x} = 4$

$y = 3^x$ යැයි ගනිමු.

එවිට ඉහත සමීකරණය $\frac{y}{9} + \frac{27}{y} = 4$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

$y^2 - 36y + 243 = 0$

$(y-27)(y-9) = 0$

$y = 27$ හෝ $y = 9$

$3^x = 27$ හෝ $3^x = 9$

$3^x = 3^3$ හෝ $3^x = 3^2$

$x = 3$ හෝ $x = 2$

දී ඇති සමීකරණයේ විසඳුම් වන්නේ $x = 3, 2$

උදාහරණ 4.8

විසඳන්න.

$(x+1)(2x+1)(2x-7)(x-3) = 45$

$(x+1)(2x+1)(2x-7)(x-3) = 45$

$[(x+1)(2x-7)][(2x+1)(x-3)] = 45$

$(2x^2-5x-7)(2x^2-5x-3) = 45$

$y = 2x^2 - 5x$ ලෙස ගනිමු.

එවිට ඉහත සමීකරණය ලෙස ලිවිය හැකි ය.

$$(y-7)(y-3)=45$$
$$y^2-10y+21=45$$
$$y^2-10y-24=0$$
$$(y+2)(y-12)=0$$
$$y+2=0 \qquad y-12=0$$
$$2x^2-5x+2=0 \qquad 2x^2-5x-12=0$$
$$(2x-1)(x-2)=0 \qquad (2x+3)(x-4)=0$$
$x=\frac{1}{2}$ හෝ 2 $\qquad$ $x=-\frac{2}{3}$ හෝ 4

$\therefore$ දී ඇති සමීකරණයේ මූල $-\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ 2,\ 4$ වේ.

උදාහරණ 4.9

$\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}=6$ විසඳන්න.

මෙම සමීකරණය වලංගු වන්නේ,

$4x-3\geq 0$ හා $2x+3\geq 0$ නම් හා නම් ම පමණි.

$\Rightarrow \quad x\geq\frac{3}{4}$ හා $x\geq-\frac{3}{2}$ නම් හා නම් ම පමණි.

ඉහත අවශ්‍යතා දෙක ම සපුරාලිය යුතු බැවින්, $x\geq\frac{3}{4}$ විය යුතුයි.

$\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}=6 \quad x\geq\frac{3}{4}$

දෙපස ම වර්ග කිරීමෙන්

$$(4x-3)+2\sqrt{(4x-3)(2x+3)}+(2x+3)=36$$
$$6x-36=2\sqrt{(4x-3)(2x+3)}$$
$$3(x-6)=\sqrt{(4x-3)(2x+3)}$$

නැවත දෙපස ම වර්ග කිරීමෙන්

$$9(x-6)^2=(4x-3)(2x+3)$$
$$9(x^2-12x+36)=8x^2+6x-9$$
$$x^2-114x+333=0$$
$$(x^2-111)(x-3)=0$$

$x=3$ හෝ $x=111$

$x = 3$ හෝ 111 යන විසඳුම් දෙක ම $x \geq \frac{3}{4}$ අවශ්‍යතාවය සපුරයි.

දැන් අපි ඒ එක් එක් විසඳුම තහවුරු කරමු.

$x = 3$ විට,

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+3}$$
$$= \sqrt{9} + \sqrt{9} = 3+3 = 6 = \text{R.H.S.}$$

$x = 111$ විට,

$$\text{L.H.S} = \sqrt{4x-3} \quad + \sqrt{2x+3}$$
$$= \sqrt{4\times111-3} + \sqrt{2\times111-3}$$
$$= \sqrt{441} \quad + \sqrt{225}$$
$$= 21 \quad + 15 \quad = 36 \neq \text{R.H.S}$$

$\therefore$ $x = 111$ ඉහත සමීකරණය තෘප්ත නොකරයි.

$\therefore$ දී ඇති සමීකරණය සඳහා ගැලපෙන එකම විසඳුම $x = 3$ වේ.

අභ්‍යාසය 4.1

පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

1. $3-2(2x+1)=7$

2. $\frac{x+9}{2}-\frac{2x-3}{2}=\frac{3x+4}{4}$

3. $\frac{x+3}{4}-\frac{x-3}{5}=2$

4. $\frac{2x}{15}-\frac{x-6}{12}-\frac{3x}{20}=\frac{3}{2}$

5. $6-\frac{4(x-3)}{3}=\frac{x-2}{5}$

6. $\frac{4-3x}{8}+2=\frac{x-5}{4}-x$

7. $\frac{3x-11}{x-4}-\frac{x+7}{x+4}=2$

8. $(x+1)(2x-1)+(x-3)(2x+1)=(2x+3)^2$

9. $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{2}{x+4}$

10. $\frac{3x-2}{4}-\frac{x-3}{5}=x+1$

අභ්‍යාසය 4.2

පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

1. $3x^2 - 2x = 0$

2. $(x+2)^2 = 1$

3. $(x-3)(x-5) = 3$

4. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

5. $x^2 - 3x(3x-4) + 8 = 0$

6. $5x(x+1) - x(2x+1) = 4$

7. $x^2 + (x+3)^2 = 15^2$

8. $\dfrac{3}{x-3} - \dfrac{4}{x-4} + \dfrac{5}{x-1} = 0$

9. $\dfrac{x}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{1}{(x+2)(2x-1)} - \dfrac{1}{(x-1)(2x-1)} = 0$

10. $\dfrac{x-1}{(x-3)(x-2)} - \dfrac{x-2}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{x+1}{(x-2)(x-1)}$

11. $\dfrac{2}{3(x+2)} - \dfrac{3}{(2x+7)} = \dfrac{1}{15}$

12. $\dfrac{14}{2x-1} - \dfrac{7}{x} = \dfrac{1}{3}$

පහත සඳහන් සමීකරණ වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

13. $x^2 - 6x - 5 = 0$

14. $2x^2 + 7x - 5 = 0$

15. $2x^2 - 3x - 7 = 0$

16. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x-1}{5} = 0$

අභ්‍යාසය 4.3

පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

1. $(x^2 + 5x + 7)^2 - 4(x^2 + 5x + 7) + 3 = 0$

2. $(x^2 - 9x + 15)\ (x^2 - 9x + 20) = 6$

3. $\left(x + \dfrac{2}{x} + 4\right)\left(x + \dfrac{2}{x} - 1\right) = 6$

4. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+5\left(\frac{x}{x+1}\right)+6=0$

5. $3\left[(x+7)^{\frac{1}{2}}+(x+7)^{-\frac{1}{2}}\right]=10$

6. $x+4\sqrt{x}=12$

7. $x+3\sqrt{5x}=50$

8. $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

9. $x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=2$

10. $9x^{\frac{2}{3}}+4x^{-\frac{2}{3}}=37$

11. $\frac{x^2}{x^2+3x+2}+\frac{2(x^2+3x+2)}{x^2}=12\frac{1}{6}$

12. $\sqrt{\frac{x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}=2\frac{1}{6}$

13. $\frac{5}{x^2+6x+2}=\frac{3}{x^2+6x+1}-\frac{4}{x^2+6x+8}$

14. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x-\frac{1}{x}\right)=12\frac{3}{4}$

15. $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

16. $9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-27\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$

17. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

18. $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$

19. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x-\frac{1}{x}\right)+14=0$

20. $8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-42\left(x-\frac{1}{x}\right)+29=0$

21. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)=4$

22. $3^{x+2}+3^{-x}=10$

23. $5^{x+1}+5^{1-x}=5^2+5^0$

24. $4^{1+x}+4^{1-x}=10$

25. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+9}=7$

26. $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$

27. $\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-5}=1$

28. $2^{2x+3}=65(2^x-1)+57$

29. $(x-6)(x-5)(x+1)(x+2)=144$

30. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{29}{4}$

31. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=0$

4.2 විචල්‍ය දෙකකින් යුත් සමීකරණ

4.2.1 x හා y විචල්‍ය දෙකකින් යුත් ඒකජ සමීකරණ

එනම්, $ax + by = m,\ cx + dy = n$ ආකාරයේ සමීකරණ විසඳීම විමසා බලමු.

නිදසුන 4.10

$4x + 3y = 17$
$5x - 2y = 4$ විසඳන්න.

$$4x + 3y = 17 \quad \text{———} \quad (1)$$
$$5x - 2y = 4 \quad \text{———} \quad (2)$$

(1)x2, $8x + 6y = 34$ ——— (3)

(2)x 3, $15x - 6y = 12$ ——— (4)

(3)+(4) $23x = 46$

$$x = \frac{46}{23} = 2$$

(1) හි ආදේශයෙන්,

$8 + 3y = 17$

$3y = 9$

$y = 3$

$x = 2,\ y = 3$

4.2.2 එක් සමීකරණයක් පමණක් ඒකජ සමීකරණයක් වන අවස්ථා

නිදසුන 4.11

$2x - 3y = 1$

$2x^2 + 3x - 3y^2 = 38$ විසඳන්න.

$2x - 3y = 1$ ———— (1)

$2x^2 + 3x - 3y^2 = 38$ ———— (2)

(1) සමීකරණයෙන්, $y = \frac{2x-1}{3}$

$y = \frac{2x-1}{3}$, (2) හි ආදේශයෙන්,

$$2x^2 + 3x - 3y^2 = 38$$

$$2x^2 + 3x - 3\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 = 38$$

$$6x^2 + 9x - (4x^2 - 4x + 1) = 114$$

$$2x^2 + 13x - 115 = 0$$

$$(2x+23)(x-5) = 0$$

$x = -\frac{23}{2}$ හෝ $x = 5$

$x = 5$ විට $\qquad$ $x = -\frac{23}{2}$ විට,

$y = \frac{2\times5-1}{3} = 3$ $\qquad$ $y = \frac{-23-1}{3} = -8$

$x = 5$ $\qquad$ $x = -\frac{23}{2}$

$y = 3$ $\qquad$ $y = -8$

4.2.3 සමීකරණ දෙක ම වර්ගජ සමීකරණ වන අවස්ථා

නිදසුන 4.12

$x^2 - xy = 6$

$x^2 + y^2 = 61$ විසඳන්න.

$x^2 - xy = 6$ ———————— (1)

$x^2 + y^2 = 61$ ———————— (2)

(1)x 61, $61(x^2 - xy) = 61 \times 6$
(2)x 6, $6(x^2 + y^2) = 6 \times 61$

$61(x^2 - xy) = 6(x^2 + y^2)$
$55x^2 - 61xy - 6y^2 = 0$
$(11x + y)(5x - 6y) = 0$

$y = -11x$ හෝ $y = \frac{5x}{6}$

$y = -11x$ විට (1) න්,

$x^2 - x(-11x) = 6$

$12x^2 = 6$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ හෝ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ විට $y = \frac{-11}{\sqrt{2}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ විට $y = \frac{11}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{11}{\sqrt{2}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{11}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{5x}{6}$ විට (1) න්,

$x^2 - x + \frac{5x}{6} = 6$

$x^2 = 36$

$x = \pm 6$

$x = 6$ විට $y = \frac{5\times 6}{6} = 5$

$x = -6$ විට $y = \frac{5\times(-6)}{6} = -5$

$\therefore\ x = 6,\ y = 5$

$x = -6,\ y = -5$

නිදසුන 4.13

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$

$x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y = 15$ විසඳන්න.

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$ ———— (1)

$x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y = 15$ —— (2)

(1) න් $x^2 + xy - 2y^2 = 0$

$(x + 2y)(x - y) = 0$

$x = -2y$ හෝ $x = y$

$x = y$ (2) හි ආදේශයෙන් , $y^2 + 2y^2 + 3y^2 + 4y + 5y = 15$

$\Rightarrow \quad 6y^2 + 9y - 15 = 0$

$2y^2 + 3y - 5 = 0$

$(2y + 5)(y - 1) = 0$

$y = -\frac{5}{2}$ හෝ $y = 1$

$x = y$ නිසා

$x = 1 \qquad x = -\frac{5}{2}$

$y = 1 \qquad y = -\frac{5}{2}$

$x = -2y$ (2) හි ආදේශයෙන්,

$4y^2 + 2 \times -2y \times y + 3y^2 + 4 \times -2y + 5y = 15$

$4y^2 - 4y^2 + 3y^2 - 8y + 5y = 15$

$3y^2 - 3y - 15 = 0$

$y^2 - y - 5 = 0$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2}$

$x = -2y$

$\therefore \quad x = -(1+\sqrt{21}) \qquad x = -(1-\sqrt{21}$

$y = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \qquad y = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$

4.3. තවත් ආකාරවල සමීකරණවලට උදාහරණ (විචල්‍ය තුනකින් යුත් සමීකරණ ද ඇතුළත්ව)

නිදසුන 4.14

$x(3y - 5) = 4$

$y(2x + 7) = 27$ විසඳන්න.

$x(3y - 5) = 4$ ———— (1)

$y(2x + 7) = 27$ ———— (2)

(1)න්, $x = \dfrac{4}{3y-5}$

එවිට

$$\begin{aligned} 2x+7 &= 2\times\frac{4}{3y-5}+7 \\ &= \frac{8}{3y-5}+7 \\ &= \frac{21y-27}{3y-5} \end{aligned}$$

දැන් (2) සමීකරණය පහත ආකාරයට ලිවිය හැකි ය.

$$y\left(\frac{21y-27}{3y-5}\right) = 27$$

$$21y^2 - 27y = 27(3y-5)$$

$$21y^2 - 108y + 135 = 0$$

$$7y^2 - 36y + 45 = 0$$

$$(7y-15)(y-3) = 0$$

$$y = \frac{15}{7} \text{ හෝ } y = 3$$

$y = \dfrac{15}{7}$ විට

$$x = \frac{4}{3\times\frac{15}{7}-5} = \frac{4\times 7}{45-35} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$$

$y = 3$ විට

$$x = \frac{4}{3\times 3-5} = \frac{4}{4} = 1$$

$x = \dfrac{14}{5}$ හෝ $x = 1$

$y = \dfrac{15}{7}$ හෝ $y = 3$

නිදසුන 4.15

$3x + 5y = 29\,xy$

$7x + 4y = 37\,xy$ විසඳන්න.

$3x + 5y = 29\,xy$ ——— (1)

$7x + 4y = 37\,xy$ ——— (2)

$x = 0$, විට $y = 0$ වේ.

එනම්, $x = 0$, $y = 0$ ඉහත සමීකරණ දෙක ම තෘප්ත කරන බැවින්

$x = 0$, $y = 0$ එක් විසඳුමකි.

අනෙක් විසඳුම සඳහා

$x, y \neq 0$ නම් එවිට,

(1) හා (2) සමීකරණ දෙක ම xy න් බෙදීමෙන්,

$$\frac{3x}{xy} + \frac{5y}{xy} = 29$$

$$\frac{7x}{xy} + \frac{4y}{xy} = 37$$

$$\frac{3}{y} + \frac{5}{x} = 29 \quad \text{———(3)}$$

$$\frac{7}{y} + \frac{4}{x} = 37 \quad \text{———(4)}$$

4 x (3) - 5 x (4) $\quad \frac{12}{y} - \frac{35}{y} = 116 - 185$

$$-\frac{23}{y} = -69, \quad \frac{1}{y} = 3$$

$$\Rightarrow \; y = \frac{1}{3}$$

$y = \frac{1}{3}$, (3) හි ආදේශයෙන්,

$$\frac{3}{\frac{1}{3}} + \frac{5}{x} = 29$$

$$\frac{5}{x} = 20$$

$$\frac{1}{x} = 4$$

$$x = \frac{1}{4}$$

විසඳුම් වන්නේ $x=0$ හෝ $x=\frac{1}{4}$

$y=0$ හෝ $y=\frac{1}{3}$

නිදසුන 4.16

$$a+4b+4c = 7$$
$$3a+2b+2c = 6$$
$$9a+6b+2c = 14$$ විසඳන්න.

$$a+4b+4c = 7 \text{ ——— } (1)$$
$$3a+2b+2c = 6 \text{ ——— } (2)$$
$$9a+6b+2c = 14 \text{ ——— } (3)$$

2 x (2) - (1) $5a = 5$

$a = 1$

3 x (2) - (3) $4c = 4$

$c = 1$

$a = 1$ සහ $c = 1$ (1) හි ආදේශයෙන්, $\therefore$

$1+4b+4 = 7$

$4b = 2$, $b=\frac{1}{2}$

විසඳුම් වන්නේ,

$a = 1$

$b=\frac{1}{2}$

$c = 1$

නිදසුන 4.17

$x+y=1$
$y+z=2$ විසඳන්න.
$z+x=5$

$$x+y=1 \text{ ——— } (1)$$
$$y+z=2 \text{ ——— } (2)$$
$$z+x=5 \text{ ——— } (3)$$

(1)+(2)+(3) ,

$$2(x+y+z)=8$$
$$x+y+z = 4 \text{ ——— } (4)$$

$x+y=1$, (4) හි ආදේශයෙන් $z=3$

$y+z=2$, (4) හි ආදේශයෙන් $x=2$

$x+y=5$, (4) හි ආදේශයෙන් $y=-1$

$x=2, y=-1, z=3$

නිදසුන 4.18

විසඳන්න. $ab=3$

$bc=6$

$ac=2$

$ab=3$ ———— (1)

$bc=6$ ———— (2)

$ac=2$ ———— (3)

(1) $\times$(2) $\times$ (3) ,

$(ab)\times(bc)\times(ac)=3\times6\times2$ $\therefore$

$a^2b^2c^2=36$

$abc=\pm6$

$abc=6$ සලකමු.

$abc=6$ ——— (4)

$ab=3$ (4) හි ආදේශයෙන් $c=2$

$bc=6$ (4) හි ආදේශයෙන් $a=1$

$ac=2$ (4) හි ආදේශයෙන් $b=3$

$abc=-6$ සලකමු.

$abc=-6$ ——— (5)

$ab=3$ (5) හි ආදේශයෙන් $c=-2$

$bc=6$ (5) හි ආදේශයෙන් $a=-1$

$ac=2$ (5) හි ආදේශයෙන් $b=-3$

$a=1$	$a=-1$
$b=3$	$b=-3$
$c=2$	$c=-2$

අභ්‍යාසය 4.4

පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

1. $x+2y=4$
   $3x+5y=9$

2. $3x-2y=7$
   $2x-5y=12$

3. $5x-3y=18$
   $3x=11+2y$

4. $53x+47y=59$
   $47x+53y=41$

5. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{2x+2y}{9}$

6. $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=18$
   $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=-1$

7. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-5$
   $\frac{3}{x}-\frac{5}{y}=21$

8. $\frac{3}{x}-\frac{2}{y}=2$
   $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=1$

9. $5x-\frac{2}{y}=9$
   $2x-\frac{5}{y}=12$

10. $4x+\frac{5}{y}=3$
    $3x-\frac{4}{y}=10$

11. $ax-by=bx-ay=a^2-b^2$

12. $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{y-4}=2$
    $\frac{4}{x+1}-\frac{9}{y-4}=5$

13. $\frac{x-2}{y}=\frac{1}{3}$
    $\frac{x}{y+1}=\frac{1}{2}$

14. $\frac{x+y}{xy}=2$
    $\frac{x-y}{xy}=6$

15. $(a+b)x+(a-b)y=2a$
    $(a-b)x+(a+b)y=2b$

අභ්‍යාසය 4.5

විසඳන්න.

1. $y-2x=1$
   $y^2=2x^2+x$

2. $x-2y=1$
   $x^2-2xy+2y^2=25$

3. $2x+3y=5$
   $x^2+2xy=10+y$

4. $x+y=4$
   $x^2-y=8$

5. $3x+2y=25$
$xy=4$

6. $2y-3x=2$
$4y^2-4xy-18x^2=5$

7. $x^2-y^2=7$
$x=y^2-5$

8. $4x^2-3y^2=13$
$5x^2+2y=18$

9. $x^2+xy-y^2+6x-1=0$
$3x^2+5xy-2y^2=0$

10. $x^2-2xy-y^2=14$
$2x^2+3xy+y^2=-2$

11. $x^2-xy+3y^2=15$
$3x^2-2y^2=-5$

12. $(x-2)(y-1)=3$
$(x+2)(2y-5)=15$

13. $\frac{x}{3}+\frac{3}{y}=\frac{x}{4}-\frac{4}{y}=1$

14. $x(y+3)=4$
$3y(x-4)=5$

15. $x-2y+3z=17$
$2x+y+5z=17$
$3x-4y-2z=1$

16. $2x+3y-4z=10$
$4x-5y+3z=2$
$2y+z=8$

17. $x+3y-2z=19$
$3x-y-z=7$
$-2x+5y+z=2$

18. $4x+3y-2z=11$
$3x-7y+3z=10$
$9x-8y+5z=8$

19. $xy=1,\ yz=9,\ zx=16$ යන සමීකරණ විසඳීමෙන්,
$(y+z)(z+x)=1,\ (z+x)(x+y)=9,\ (x+y)(y+z)=16$ බව ලබා ගන්න.

20. පහත දැක්වෙන සමීකරණ විසඳන්න.
$(y-2)(z-1)=4$
$(z-1)(x+1)=20$
$(x+1)(y-2)=5$

21. විසඳන්න.
$x(y+z)=33,\quad y(z+x)=35,\quad z(x+y)=14$

22. $y(z-x)=3,\quad x(y+z)=32,\quad x+y+z=12$ විසඳන්න.

5. දර්ශක සහ ලඝුගණක

5.1 දර්ශක නීති

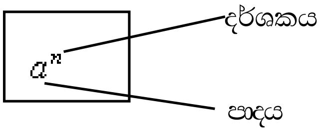
a, b තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද m හා n පරිමේය සංඛ්‍යා ද වන විට

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$
$$(ab)^m = a^m b^m$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$a \neq 0$, සහ n පරිමේය සංඛ්‍යාවක් වන විට

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1 \text{ වේ.}$$

හි a පාදය ලෙස ද n දර්ශකය හෙවත් ඝාතය ලෙස ද හැඳින් වේ.



සමීකරණයක විචල්‍ය, දර්ශකය ලෙස පිහිටන විට එවැනි සමීකරණ දර්ශක සමීකරණ ලෙස හැඳින් වේ. උදාහරණයක් ලෙස $2^x = 32$ යනු දර්ශක සමීකරණයකි.

නිදසුන 5.1

$x = 9$ සහ $y = 16$ විට පහත සඳහන් ඒවායේ අගය සොයන්න.

(a) $x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{3}{4}}$ (b) $\left(\frac{6x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$ (c) $(4xy)^{-\frac{1}{2}}$ (d) $(x+y)^{-\frac{1}{2}}$

(a) $x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{3}{4}} = 9^{\frac{1}{2}} \times 16^{\frac{3}{4}}$
$= \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}$
$= 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$

(b) $\left(\frac{6x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6\times 9}{16}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

(c) $(4xy)^{-\frac{1}{2}} = (4\times 9\times 16)^{-\frac{1}{2}} = \left[(2\times 3\times 4)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = (2\times 3\times 4)^{-1} = 24^{-1} = \frac{1}{24}$

(d) $(x+y)^{-\frac{1}{2}} = (9+16)^{-\frac{1}{2}} = 25^{-\frac{1}{2}} = (5^2)^{-\frac{1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

නිදසුන 5.2

(a) $2^x = 10^3 \times 5^{-x}$

(b) $16^{x-1} = \frac{1}{8}$ විසඳන්න.

(a)
$$\begin{aligned} 2^x &= 10^3 \times 5^{-x} \\ 2^x &= 10^3 \times \frac{1}{5^x} \\ 2^x \times 5^x &= 10^3 \\ 10^x &= 10^3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 16^{x-1} &= \frac{1}{8} \\ (2^4)^{x-1} &= \frac{1}{2^3} \\ 2^{4x-4} &= 2^{-3} \\ 4x-4 &= -3 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5.2 ලඝුගණක

$y = 3^x$ සලකමු. x හි සියලු තාත්ත්වික අගයයන් සඳහා y හි අගය සෑම විට ම ධන සංඛ්‍යාවක් වන බව පැහැදිලි ය.

$x = 2$ විට $y = 9$

$x = 3$ විට $y = 27$ $\log_a y = x$

$x = 0$ විට $y = 1$ 81

$x =$ -4 විට $y =$

$3^x = y$ හි 3, පාදය ලෙස ද x , දර්ශකය ලෙස ද හැඳින් වේ. එවිට " තුනේ පාදයට $y(>0)$ හි ලඝුගණකය x වේ" යැයි කියනු ලැබේ.

එය $3^x = y \Leftrightarrow \log_3 y = x$ ලෙස ලියනු ලැබේ. සාධාරණ වශයෙන්, $a^x = y, (a > 0, y > 0)$ a පාදයට y හි ලඝුගණකය x වේ යැයි අර්ථ දක්වනු ලැබේ. එය සංකේත ඇසුරින් ලෙස දක්වනු ලැබේ.

$$\boxed{a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x,\ a, y > 0,\ a \neq 1}$$

නිදසුන 5.3

$$2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$$

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

$$3^{-4} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{81} = -4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$$

$$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$$

5.2.1 ලඝුගණකවල මූලික ලක්ෂණ

$m, n\ a > 0$ සහ $a \neq 1.$ විට (a) $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$ (b) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$ (c) $\log_a m^p = p\log_a m$, p පරිමේය සංඛ්‍යාවකි.

සාධනය :

$\log_a m = x$ සහ $\log_a n = y$ යැයි ගනිමු.

$$\log_a m = x \Leftrightarrow m = a^x$$

$$\log_a n = y \Leftrightarrow n = a^y$$

(a) $mn = a^x \times a^y = a^{x+y} \Leftrightarrow \log_a mn = x + y$

$\log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n$

(b) $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Leftrightarrow \log_a \left(\frac{m}{n}\right) = x - y$

$\log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n$

(c) $m^p = \left(a^x\right)^p = a^{px}$

$\log_a m^p = px = p\log_a m$

නිදසුන 5.4

පහත සඳහන් ප්‍රකාශනවල අගය සොයන්න.

(a) $\log_{10} 5 - \log_{10} 16 + 2\log_{10} 2 + \log_{10} 8$

(b) $\log_{10} 54 - \log_{10} 15 + 2\log_{10} \frac{5}{3}$

(a) $\log_{10} 5 - \log_{10} 16 + 2\log_{10} 2 + \log_{10} 8$

$= \log_{10} 5 - \log_{10} 16 + \log_{10} 2^2 + \log_{10} 8$

$= \log_{10}\left(\frac{5 \times 2^2 \times 8}{16}\right)$

$= \log_{10} 10 = 1$

(b)

$$\log_{10} 54 - \log_{10} 15 + 2\log_{10} \frac{5}{3}$$

$$= \log_{10} 54 - \log_{10} 15 + \log_{10} \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= \log_{10} \left(\frac{54 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2}{15}\right)$$

$$= \log_{10} \left(\frac{54 \times 25}{9 \times 15}\right)$$

$$= \log_{10} 10 = 1$$

නිදසුන 5.5

විසඳන්න. (a) $3\log x + \log 96 = 2\log 9 + \log 4$

(b) $4\log x + 6\log 3 = \log 625 + \log 9$

(a) $3\log x + \log 96 = 2\log 9 + \log 4$

$$\log x^3 + \log 96 = \log 9^2 + \log 4$$

$$\log \left(x^3 \times 96\right) = \log \left(9^2 \times 4\right)$$

$$x^3 \times 96 = 9^2 \times 4$$

$$x^3 = \frac{9^2 \times 4}{96}$$

$$x^3 = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

(b) $4\log x + 6\log 3 = \log 625 + \log 9$

$$\log x^4 + \log 3^6 = \log 625 + \log 9$$

$$\log \left(x^4 \times 3^6\right) = \log \left(625 \times 9\right)$$

$$x^4 \times 3^6 = 625 \times 9$$

$$x^4 = \frac{625 \times 9}{3^6} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$$

$$x = \frac{5}{3}$$

නිදසුන 5.6

$\log_{10} 2 = 0.3010$ සහ $\log_{10} 3 = 0.4771$ බව දී ඇත්නම් පහත සඳහන් ඒවායේ අගය සොයන්න.

(a) $\log_{10} 18$ (b) $\log_{10} 15$ (c) $\log_{10} 0.012$

(a)
$$\begin{aligned}\log_{10} 18 &= \log_{10}(2\times 3^2)\\ &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3^2\\ &= \log_{10} 2 + 2\log_{10} 3\\ &= 0.3010 + 2\times 0.4771\\ &= 0.3010 + 0.9542 = 1.2552\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\log_{10} 15 &= \log_{10}(5\times 3)\\ &= \log_{10} 5 + \log_{10} 3\\ &= \log_{10}\frac{10}{2} + \log_{10} 3\\ &= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 + \log_{10} 3\\ &= 1 - 0.3010 + 0.4771\\ &= 1.1761\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\log_{10} 0.012 &= \log_{10}\frac{12}{1000}\\ &= \log_{10} 12 - \log_{10} 1000\\ &= \log_{10}\left(2^2\times 3\right) - \log_{10} 10^3\\ &= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3 - 3\log_{10} 10\\ &= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 3\log_{10} 10\\ &= 2\times 0.3010 + 0.4771 - 3\\ &= 1.0791 - 3\\ &= 1 + 0.0791 - 3\\ &= -2 + 0.0791 \ = \bar{2}.0791\end{aligned}$$

නිදසුන 5.7

(a) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{243}$ (b) $\log_{2\sqrt{2}} 16$ අගය සොයන්න.

(a) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{243} = x$ යැයි ගනිමු.

$\left(\sqrt{3}\right)^{x} = 243$

$3^{\frac{1}{2}x} = 3^{5}$

$\frac{1}{2}x = 5$

$x = 10$

(b) $\log_{2\sqrt{2}} 16 = y$ ැයි ගනිමු.

$\left(2\sqrt{2}\right)^{y} = 16$

$\left(2\times 2^{\frac{1}{2}}\right)^{y} = 2^{4}$

$2^{\frac{3}{2}y} = 2^{4}$

$\frac{3}{2}y = 4$

$y = \frac{8}{3}$

අභ්‍යාසය ***5***

1. සහ නම් පහත සඳහන් ප්‍රකාශනවල අගය සොයන්න.

 (a) $\left(x^{\frac{2}{3}}y\right)^{\frac{1}{2}}$ (b) $(2xy)^{-\frac{1}{3}}$ (c) $\left(\frac{12y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ (d) $\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

2. අගය සොයන්න.

 (a) $\left(25^{\frac{1}{2}}\times 16^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}$ (b) $\left(\frac{64^{\frac{1}{6}}+27^{\frac{2}{3}}}{110}\right)^{2}$ 7 (c) $\left(\frac{81}{24}\right)^{\frac{1}{3}}$

3. $x=81$, $y=16$ සහ $z=25$, නම් පහත සඳහන් ප්‍රකාශනවල අගය සොයන්න.

 (a) $(xy)^{\frac{3}{4}}$ (b) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ (c) $\left[\frac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{z^{-\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$

4. සුළු කරන්න.

 $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{3^{-4}}\times\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

5. විසඳන්න. (a) $3^{x+1}=243$ (b) $16^{x-1}=\frac{1}{8}$

 (c) $4^{3x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ (d) $27^{x-3}=3\times 9^{x-2}$

 (e) $3^{x^{2}}=9^{x+4}$ (f) $9^{x}-4\times 3^{x}+3=0$

6. අගය සොයන්න.

 (i) $\log_{3}81$ (ii) $\log_{3\sqrt{2}}324$ (iii) $\log_{2\sqrt{3}}144$ (iv) $\log_{343}7$

7. අගය සොයන්න.

(a) $\log_{10}\frac{12}{5}+\log_{10}\frac{25}{21}-\log_{10}\frac{2}{7}$

(b) $\log_{10}\frac{3}{4}+\log_{10}\frac{10}{9}+\log_{10}12-2$

(c) $\frac{\log_{10}8}{\log_{10}4}$

(d) $3\log_{10}2+2\log_{10}5-\log_{10}2$

8. විසඳන්න.

(a) $5\log x-\log 729=6\log 2+\log x$

(b) $4\log x+2\log 9=3\log 24-\log 54$

(c) $2\log x=\log 3+\log(2x-3)$

9. විසඳන්න.

(a) $2^{2+2x}+3.2^{x}-1=0$

(b) $\log_{10}(x^2+1)-2\log_{10}x=1$

10 $\log_{10}2+16\log_{10}\frac{16}{15}+12\log_{10}\frac{25}{24}+7\log_{10}\frac{81}{80}=1$ බව පෙන්වන්න.

11. පහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵල සාධනය කරන්න. සියළුම පද එක ම පාදයෙන් ඇති බව සලකන්න.

(a) $\log(ab^2)-\log(ac)+\log(bc^4)-3\log(bc)=0$

(b) $\log(\log x^5)-\log(\log x^2)=\log\frac{5}{2}$

(c) $\log\left(\frac{a^2}{bc}\right)+\log\left(\frac{b^2}{ca}\right)+\log\left(\frac{c^2}{ab}\right)=0$

12. $a^2+b^2=7ab$ නම්, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}\log a+\frac{1}{2}\log b$ බව පෙන්වන්න.

13. $\log\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{2}\log y$ නම්, $x=y$ බව පෙන්වන්න.

14. $\log(1+2+3)=\log 1+\log 2+\log 3$ බව පෙන්වන්න.

15. x, y, z යනු අනුයාත ධන නිඛිල සංඛ්‍යා තුනක් නම් $\log(1+xz)=2\log y$ බව පෙන්වන්න.

16. $\log a + \log a^2 + ... + \log a^{2n} = n(2n+1)\log a,$ බව පෙන්වන්න.

17. $\log(x+y) = \log x - \log y,$ නම් $x(1-y) = y^2$ බව පෙන්වන්න.

18. $2^x.3^y = 3^x.4^x = 6$ නම් $x^2 - 2y^2 = 2x - 3y$ බව පෙන්වන්න.

19. $\frac{\log x}{2} = \frac{\log y}{3} = \frac{\log z}{5}$ නම්

(i) $xy = z$ (ii) $x^8 = y^2 z^2$ බව පෙන්වන්න.

20. $\frac{\log x}{1} = \frac{\log y}{3} = \frac{\log z}{5}$ නම් $x^5.y^3.z^{-2} = 1$ බව පෙන්වන්න.

$a > 0.$

6. අනුපාත සහ සමානුපාත

6.1 සමානුපාත :

අනුපාත දෙකක් සමාන වූ විට, එය සමානුපාතයක් ලෙස හැඳින් වේ. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ යනු සමානුපාතයකි.

එය $a:b=c:d$ ලෙස ද ලියනු ලැබේ. මෙහි a,b,c,d සමානුපාතික ලෙස හැඳින්වේ. .

6.1.1 සමානුපාතවල ගුණ

නම්,

$a:b=c:d$

(1) $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

(2) $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

(3) $$\frac{a-b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$ වේ.

$\therefore$

සාධනය

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ යැයි ගනිමු.

$\Rightarrow a=kb$ සහ $c=kd$

(1)

$$\frac{a+b}{b}=\frac{kb+b}{b}=\frac{b(k+1)}{b}=k+1$$

$$\frac{c+d}{d}=\frac{kd+d}{d}=\frac{d(k+1)}{d}=k+1$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

(2)

$$\frac{a-b}{b}=\frac{kb-b}{b}=\frac{b(k-1)}{b}=k-1$$

$$\frac{c-d}{d}=\frac{kd-d}{d}=\frac{d(k-1)}{d}=k-1$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

(3) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{kb+b}{kb-b}=\frac{(k+1)b}{(k-1)b}=\frac{k+1}{k-1}$

$\frac{c+d}{c-d}=\frac{kd+d}{kd-d}=\frac{(k+1)d}{(k-1)d}=\frac{k+1}{k-1}$

$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ නම්, සෑම අනුපාතයක් ම $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ ට සමාන වේ.

එනම්, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, නම්, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ma+nc}{mb+nd}$ වේ.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ යැයි ගනිමු.

$a=kb$ සහ $c=kd$

$$\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{kmb+knd}{mb+nd}=\frac{k(mb+nd)}{(mb+nd)}=k$$

එනම්, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ma+nc}{mb+nd}$ වේ. මෙය ගැටලු විසඳීමේ දී වැදගත් වන ප්‍රතිඵලයකි.

නිදසුන 6.1

$\frac{4a+b}{2a+b}=7$ නම්, පහත සඳහන් ඒවා අගයන්න.

(a) $\frac{5a+b}{5a-b}$ (b) $\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$

$\frac{4a+b}{2a+b}=7$

$4a+b=14a+7b$

$10a=-6b$

$5a=-3b$

$a=-\frac{3b}{5}$

(a) $\frac{5a+b}{5a-b}=\frac{-3b+b}{-3b-b}=\frac{-2b}{-4b}=\frac{1}{2}$

(b) $\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}=\frac{b^2-\frac{9b^2}{25}}{b^2+\frac{9b^2}{25}}=\frac{16}{34}=\frac{8}{17}$

නිදසුන 6.2

විසඳන්න.

$$2x-3y=0$$
$$3x+4y=51$$

$2x-3y=0,\qquad 2x=3y$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$$

$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=k$ යැයි ගනිමු.

එවිට $k=\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{3x+4y}{3\times3+4\times2}=\frac{51}{17}=3$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=3$$
$$x=9$$
$$y=6$$

නිදසුන 6.3

$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, නම්, $\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$ බව පෙන්වන්න.

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

$k=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ යැයි ගනිමු.

දැන්, $k=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{2x+3y}{2a+3b}$

$$k=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{2x-3y}{2a-3b}$$
$$\frac{2x+3y}{2a+3b}=\frac{2x-3y}{2a-3b}$$
$$\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$$

ඉහත ගැටලුව තවත් ක්‍රමයකට විසඳීමට උත්සාහ කරමු.

$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=k$ යැයි ගනිමු.

$x=ky$ සහ $a=kb$

$$\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2ky+3y}{2ky-3y}=\frac{2k+3}{2k-3}$$

$$\frac{2a+3b}{2a-3b}=\frac{2kb+3b}{2kb-3b}=\frac{2k+3}{2k-3}$$

$$\therefore \quad \frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$$

නිදසුන 6.4

$(4a+b)(4c-7d)=(4a-7b)(4c+d)$ නම්, $a:b=c:d$ බව පෙන්වන්න.

$(4a+b)(4c-7d)=(4a-7b)(4c+d)$

$$\frac{4a+b}{4c+d}=\frac{4a-7b}{4c-7d}=k$$

$$k=\frac{4a+b}{4c+d}=\frac{4a-7b}{4c-7d}=\frac{(4a+b)-(4a-7b)}{(4c+d)-(4c-7d)}=\frac{8b}{8d}=\frac{b}{d}$$

$$k=\frac{4a+b}{4c+d}=\frac{4a-7b}{4c-7d}$$

$$k=\frac{7(4a+b)}{7(4c+d)}=\frac{4a-7b}{4c-7d}=\frac{7(4a+b)+(4a-7b)}{7(4c+d)+(4c-7d)}=\frac{32a}{32c}=\frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a:b = c:d$$

නිදසුන 6.4 විසඳීම සඳහා තවත් ක්‍රමයක්

$(4a+7b)(4c-7d)=(4a-7b)(4c+7d)$ නම්, $a:b=c:d$ බව පෙන්වන්න.

$\frac{a}{b}=m$ ද $\frac{c}{d}=n$ ද යැයි ගනිමු.

එවිට $a=mb$ සහ වේ.

$a=mb$ සහ $c=nd$ දී ඇති සමීකරණයෙහි ආදේශයෙන්,

$(4a+7b)(4c-7d)=(4a-7b)(4c+7d)$

$$(4mb+7b)(4nd-7d)=(4mb-7b)(4nd+7d)$$
$$bd(4m+7)(4n-7) \quad =bd(4m-7)(4n+7)$$
$$b,d \neq 0$$
$$\therefore\ (4m+7)(4n-7) \quad =(4m-7)(4n+7)$$

$$16mn+28n-28m-49= 16mn+28m-28n-49$$
$$28n-28m = 28m-28n$$
$$n-m=m-n$$
$$2m=2n$$
$$m=n$$

එනම්, $a:b=c:d$

නිදසුන 6.5

$x=\dfrac{6ab}{a+b}$, නම්, $\dfrac{x+3a}{x-3a}+\dfrac{x+3b}{x-3b}$ හි අගය සොයන්න.

$$x=\frac{6ab}{a+b} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2b}=\frac{3a}{a+b}$$
$$\frac{x}{2b}=\frac{3a}{a+b} = \frac{x+3a}{2b+(a+b)}=\frac{x-3a}{2b-(a+b)}$$
$$\frac{x+3a}{3b+a} = \frac{x-3a}{b-a}$$
$$\frac{x+3a}{x-3a} = \frac{3b+a}{b-a} \qquad \text{———————— (1)}$$
$$x=\frac{6ab}{a+b} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2a}=\frac{3b}{a+b}$$
$$\frac{x}{2a}=\frac{3b}{a+b} = \frac{x+3b}{2a+(a+b)}=\frac{x-3b}{2a-(a+b)}$$
$$\frac{x+3b}{3a+b} = \frac{x-3b}{a-b}$$
$$\frac{x+3b}{x-3b} = \frac{3a+b}{a-b} \qquad \text{———————— (2)}$$

(1) න් හා (2) න් $\frac{x+3a}{x-3a}+\frac{x+3b}{x-3b} = \frac{3b+a}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}$

$$= \frac{(3b+a)-(3a+b)}{b-a}$$

$$= \frac{2(b-a)}{b-a}$$

$$= 2$$

අභ්‍යාසය 6

1.(a) $a:b=5:3$ සහ $b:c=4:5$ නම් $a:b:c$ සොයන්න.

(b) $x:y=3:4$ සහ $x:z=4:5$ නම් $x:y:z$ සොයන්න.

2. $x:y=7:5$ නම්, $5x-2y:3x+2y$ සොයන්න.

3. $3x+5y:5x+12y=11:12$ නම්, $x:y$ සොයන්න.

4. $5a^2-ab:2ab-b^2=6:1$ නම්, $a:b$ සොයන්න.

5. $a:b=c:d$ නම්,

(a) $(2a+3b):(2c+3d)=(2a-3b):(2c-3d)$

(b) $(3a+5b):(3a-5b)=(3c+5d):(3c-5d)$ බව පෙන්වන්න.

6. $x=\frac{2ab}{a+b}$ නම්, $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}$ හි අගය සොයන්න.

7. $x=\frac{10ab}{a+b}$ නම්, $\frac{x+5a}{x-5a}+\frac{x+5b}{x-5b}$ හි අගය සොයන්න.

8. $(2a+3b)(2c-3d)=(2a-3b)(2c+3d)$ නම්, $a:b=c:d$ බව පෙන්වන්න.

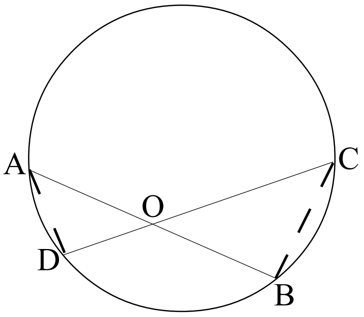
9. $(3a+6b-c-2d)(3a-6b+c-2d)=(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d)$ නම්, $a:b=c:d$ බව පෙන්වන්න.

10. සමානුපාත නීති භාවිතා කොට පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

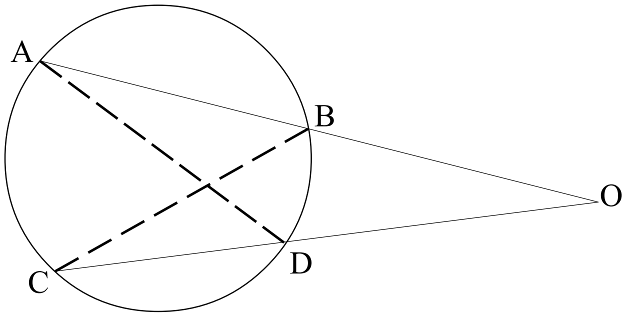
(a) $\frac{x^2+1}{2x}=\frac{5}{4}$ (b) $\frac{x^3+3x}{3x^2+1}=\frac{341}{91}$

7. වෘත්ත හා සම්බන්ධ සෘජුකෝණාස්‍ර

7.1 ප්‍රමේයය : වෘත්තයක ජ්‍යාය දෙකක් අභ්‍යන්තරව හෝ බාහිරව ඡේදනය වූ විට එක් ජ්‍යායක ඛණ්ඩවලින් යුත් (ජ්‍යාය ඛණ්ඩ දෙක බද්ධ පාද ලෙස ඇති) සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය, අනෙක් ජ්‍යායේ ඛණ්ඩවලින් යුත් සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන වේ.



(i)



(ii)

දත්තය : AB, CD ජ්‍යාය O හි දී (i) රූපයේ අභ්‍යන්තරව, (ii) රූපයේ බාහිරව ඡේදනය වේ.

සාධනය කළ යුත්ත: AO . OB = CO . OD

නිර්මාණය : AD, BC යා කිරීම.

සාධනය : (i) රූපයෙන්

AOD සහ BCO ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්,

$O\hat{A}D = O\hat{C}B$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ)

$A\hat{O}D = C\hat{O}B$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$\therefore$ තුන්වන අනුරූප කෝණ යුගලය ද සමාන වන බැවින් AOD හා COB සමරූපී ත්‍රිකෝණ වේ.

$$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB}$$

$\therefore$ AO . OB = CO . OD

(ii) රූපයෙන්

AOD සහ BCO ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්,

$A\hat{O}D = B\hat{O}C$ (පොදුයි)

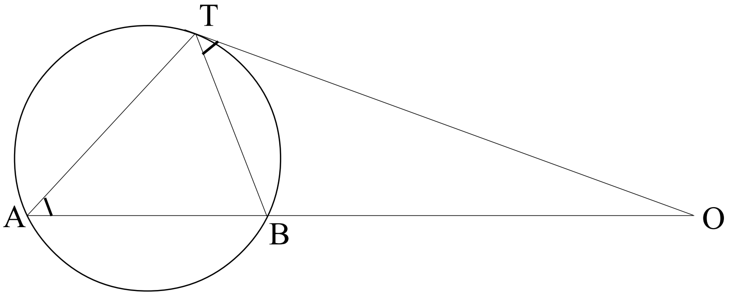
$D\hat{A}O = O\hat{C}B$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ)

$\therefore$ තුන්වන අනුරූප කෝණ යුගලය ද සමාන වන බැවින් AOD හා BCO සමරූපී ත්‍රිකෝණ වේ.

$$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow AO . OB = CO . OD$$

7.2 උප ප්‍රමේයය :

වෘත්තයකට පිටතින් පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයට ඡේදකයක් සහ ස්පර්ශකයක් ඇන්ද විට මුළු ඡේදකයෙන් සහ වෘත්තයට පිටතින් පිහිටි ඡේදක කොටසින් යුක්ත වූ සෘජුකෝණාස්‍රය, ස්පර්ශකය මත ඇඳිය හැකි සමචතුරස්‍රයට වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.



දත්තය : වෘත්තයට O ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇඳි ඡේදකය OBA ද ස්පර්ශකය OT ද වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $OA \cdot OB = OT^2$

නිර්මාණය : BT, AT යා කරන්න.

සාධනය : OAT හා OTB ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්,

$A\hat{O}T = B\hat{O}T$ (පොදුයි)

$O\hat{A}T = O\hat{T}B$ (ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩ ප්‍රමේයය)

∴ තුන්වන අනුරූප කෝණ යුගලය ද සමාන වන බැවින් OAT හා OTB ත්‍රිකෝණ සමරූපී වේ.

∴ අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OB}$$

$$OA \cdot OB = OT^2$$

අභ්‍යාසය 7

1. කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තයකට පිටතින් පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයට ඇඳි ඡේදකයක් PXY වේ. OP = 10 cm ද වෘත්තයේ අරය 6cm ද නම් සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග සොයන්න. PX = 5 cm, නම් XY හි දිග සොයන්න.

2. වෘත්තයකට පිටතින් පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයට PT ස්පර්ශකය හා PQR ඡේදකය ඇඳ තිබේ. PQ = 4 cm සහ PT = 8 cm නම් QR හි දිග ගණනය කරන්න.

3. ABC ත්‍රිකෝණයේ BD සහ CE උච්ච H හි දී හමු වේ. BH : HD = EH : HC බව පෙන්වන්න.

4. ගඟක ඉවුරු දෙකක් සම්බන්ධකර තනා ඇති පාලමක දිග 100m කි. එහි පදිකයින් සඳහා වූ ගමන් මග නිර්මාණය කර සකසා ඇත්තේ පාලමට ඉහලින් වූ වෘත්ත චාපයක් ලෙස දිස්වෙන අයුරිනි. මෙම පාලමෙහි අන්ත දෙකෙහි වූ A හා B කුළුණු දෙකක් මගින් දරා සිටී. පදිකයින්ගේ ගමන් මගෙහි ඉහල ම ලක්ෂ්‍යය වන C පාලමේ සිට 20m ක උසකින් පිහිටා තිබේ නම්, චාපයේ අරය සොයන්න.

5. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට පිටතින් පිහිටි T ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශක දෙකක් TA හා TB වේ. OT සහ AB, X හි දී ඡේදනය වේ.
   (i) AX . XB = OX . XT බවත්
   (ii) OX . OT = OA^2 බවත් සාධනය කරන්න.

6. එකිනෙක ඡේදනය නොවන වෘත්ත දෙකක කේන්ද්‍ර A හා B වේ. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් C, D ලක්ෂ්‍යවල දී කේන්ද්‍රය A වූ වෘත්තය ද, E, F ලක්ෂ්‍යවල දී කේන්ද්‍රය B වූ වෘත්තය ද කපයි. දික්කළ CD හා EF සරල රේඛා P හි දී හමුවේ නම් P සිට වෘත්තවලට ඇඳි ස්පර්ශක දිගින් සමාන බව පෙන්වන්න.

7. AB හා AC වෘත්තයක ජ්‍යාය දෙකකි. A හි දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයට සමාන්තර රේඛාවක් මගින් AB හා AC පිළිවෙළින් D හා E හි දී කපයි. AB . AD = AC . CE බව සාධනය කරන්න.

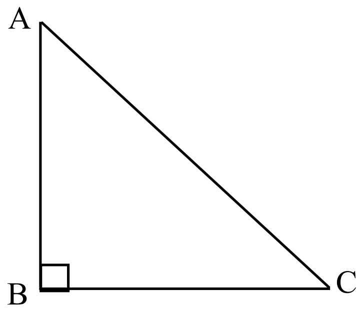
8. PQ හා PR යනු වෘත්තයක ජ්‍යාය දෙකකි. තවත් PS ජ්‍යායක් QR රේඛාව T හි දී කපයි. PS . ST = PQ^2 බව පෙන්වන්න.

8. පයිතගරස් ප්‍රමේයය සහ එහි විස්තීරණ

8.1 පයිතගරස් ප්‍රමේයය :

සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, සෘජුකෝණය පිහිටියා වූ පාද මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයන්ගේ වර්ගඵලවල ඓක්‍යයට සමාන වේ.

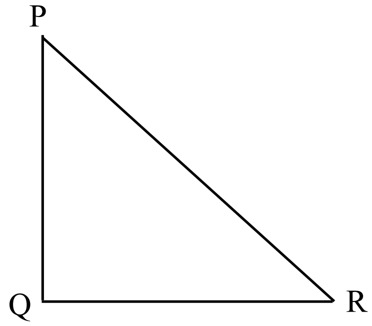
ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 90^0$ නම්,
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ වේ.



8.1.1 පයිතගරස් ප්‍රමේයයේ විලෝමය :

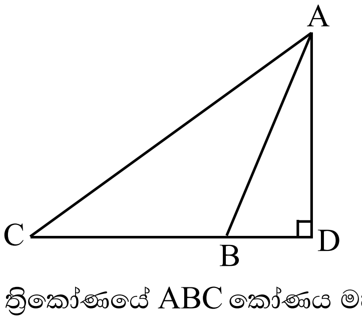
ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක් මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයෙහි වර්ගඵලය ඉතිරි පාද දෙක මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයන්ගේ වර්ගඵලයන්හි ඓක්‍යයට සමාන නම්, එම පාද දෙක එකිනෙකට සෘජුකෝණීව පිහිටා ඇත.

PQR ත්‍රිකෝණයේ
$PQ^2 + QR^2 = PR^2$ නම්
$P\hat{Q}R = 90^0$ වේ.



8.1.2 ප්‍රමේයය:

මහා කෝණී ත්‍රිකෝණයක මහා කෝණයට සම්මුඛ පාදය මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය ඉතිරි පාද දෙක මත අඳින ලද සමචතුරස්‍ර දෙකේ වර්ගඵලවල හා මහා කෝණය අඩංගු වන පාදයකින් ද එම පාදය මත මහා කෝණය අඩංගු අනෙක් පාදයේ ප්‍රක්ෂේපනයෙන් ද සෑදෙන සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලයේ දෙගුණයේත් ඓක්‍යයට සමාන වේ.



දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ ABC කෝණය මහා කෝණයක් වේ. දික් කරන ලද CBට A සිට ඇඳි ලම්බය AD වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$

සාධනය : $A\hat{D}C$ සෘජුකෝණයක් නිසා

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (පයිතගරස් ප්‍රමේයය)

$= (BC + BD)^2 + AD^2$

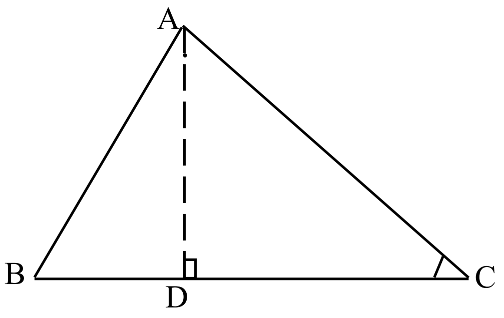
$= AD^2 + CB^2 + 2\ CB\ \ BD + BD^2$

$= AD^2 + BD^2 + CB^2 + CB\ \ BD$; $A\hat{D}B$ සෘජුකෝණයක් නිසා

$= AB^2 + BC^2 + 2\ BC\ \ BD$ $\quad AD^2 + BD^2 = AB^2$ නිසා

8.1.3 ප්‍රමේයය:

ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක සුළු කෝණයකට සම්මුඛ පාදය මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය ඉතිරි පාද දෙක මත අඳින ලද සමචතුරස්‍ර දෙකේ වර්ගඵලවල ඓක්‍යයට වඩා සුළු කෝණය අඩංගු වන පාදයකින් ද එම පාදය මත සුළු කෝණය අඩංගු අනෙක් පාදයේ ප්‍රක්ෂේපණයෙන් ද සෑදෙන සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලයේ දෙගුණයෙන් කුඩා වේ.



දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C$ සුළු කෝණයක් වේ. BC මත AB හි ප්‍රක්ෂේපණය BD වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC\ \ BD$

සාධනය : $A\hat{D}C$ සෘජුකෝණයක් නිසා

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$= AD^2 + (BC - BD)^2$

$= AD^2 + BC^2 - 2\ BC\ \ BD + BD^2$

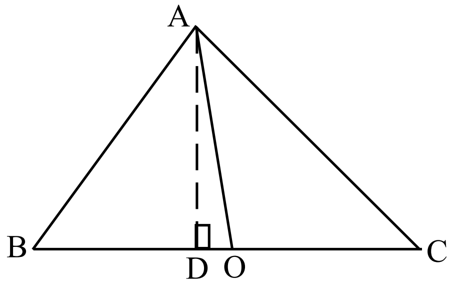
$= AD^2 + BD^2 + BC^2 - 2\ BC\ \ BD$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC\ \ BD$; $A\hat{D}B$ සෘජුකෝණයක් නිසා

$AD^2 + BD^2 = AB^2$ නිසා

8.2 ඇපලෝනියස් ප්‍රමේයය:

ත්‍රිකෝණයක ඕනෑම පාද දෙකක් මත අඳින ලද සමචතුරස්‍ර දෙකේ වර්ගඵලවල ඓක්‍යය තුන්වැනි පාදයෙන් අර්ධයක් මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලයේ දෙගුණයේත්, තුන්වැනි පාදයේ මධ්‍යස්ථය මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලයේ දෙගුණයේත් ඓක්‍යයට සමාන වේ.



දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයක BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O වේ. AO මධ්‍යස්ථයකි.

සාධනය කළ යුත්ත : $AB^2 + AC^2 = 2\,BO^2 + 2\,AO^2$

නිර්මාණය : BCට ලම්බව AD අඳින්න.

සාධනය : AOB කෝණය හෝ AOC කෝණය මහා කෝණයක් විය යුතුයි.

රූපයේ පරිදි AOC මහා කෝණයක් යැයි ගනිමු.

එවිට, $AC^2 = AO^2 + OC^2 + 2\,CO\,.\,OD$ (1)

AOB මහා කෝණයක් නිසා AOC සුළු කෝණයක් වේ.

එවිට $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2\,OB\,.\,OD$ (2)

(1) + (2) න්,

$AC^2 + AB^2 = 2\,AO^2 + 2\,BO^2$ (OB = OC නිසා)

අභ්‍යාසය 8

1. ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O වේ. $8\,BC^2 = 4\,OA^2$ බව පෙන්වන්න.

2. ABCD යනු පාදයක දිග 12 cm වූ සමචතුරස්‍රයකි. BD විකර්ණය මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය ABCD සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.

3. PQR ත්‍රිකෝණයේ $P\hat{Q}R = 90^0$ ක් වේ. QR සහ PQ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් X හා Y වේ. $6PR^2 = 4(PQ^2 + RY^2)$ බව පෙන්වන්න.

4. ABC ත්‍රිකෝණය තුල පිහිටි ඕනෑ ම O ලක්ෂ්‍යයක සිට පිළිවෙලින් BC, CA, AB පාදවලට ඇඳි ලම්බ OX, OY, OZ වේ. $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$ බව පෙන්වන්න.

5. ABC ත්‍රිකෝණයේ, A සිට BC ට ඇඳි ලම්බය AD වේ. පිළිවෙළින් a, b, c, p යනු BC, AC, AB හා AD පාදවල දිග වේ.
   (i) $a = 25$ cm, $p = 12$ cm, $BD = 9$ cm නම් b හා c අගයන්න.
   (ii) $b = 82$ cm, $c = 1$ m, $BD = 60$ cm; නම්, p හා c සොයන්න.
   $\sqrt{b^2 - p^2} + \sqrt{c^2 - p^2} = a$ බව පෙන්වන්න.

6. ABC ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{C}A$ සෘජුකෝණයකි. AB, BC, CA සහ C සිට AB ට ඇඳි ලම්බයේ දිග පිළිවෙළින් c, a, b හා p වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය ආකාර දෙකකට ප්‍රකාශ කිරීමෙන් $pc = ab$ බව පෙන්වන්න.
   එනයින් $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

7. ABC ත්‍රිකෝණයේ AD යනු මධ්‍යස්ථයකි. X යනු BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $BX = XD$ සහ $A\hat{X}B = 90^0$ නම් $4(AC^2 - AD^2) = BX^2$ බව පෙන්වන්න.

8. ABD යනු A කෝණය 90^0 ක් වූ සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයකි. BD මත C පිහිටා ඇත්තේ, $2\,BC = CD$ සහ $A\hat{C}D = 90^0$ වන පරිදි ය. CT යනු ACD ත්‍රිකෝණයේ මධ්‍යස්ථයක් නම්, $2(CT^2 + AT^2) = AD^2$ බව පෙන්වන්න.

9. ABC ත්‍රිකෝණයේ E හා D ලක්ෂ්‍ය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $BE = ED = DC$ වන පරිදි ය. $AB^2 + AE^2 = AC^2 + AD^2$ බව පෙන්වන්න.

10. ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ. $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm සහ $AC = 6$ cm නම් AD මධ්‍යස්ථයේ දිග සොයන්න.

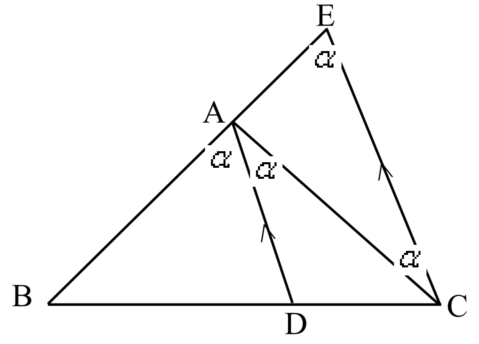
9. සමච්ඡේදක ප්‍රමේයය

9.1 ප්‍රමේයය :

(a) ත්‍රිකෝණයක ඕනෑම කෝණයක අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකයෙන් කෝණය අඩංගු පාදවල අනුපාතය අනුව සම්මුඛ පාදය අභ්‍යන්තරව බෙදේ.

(b) ත්‍රිකෝණයක ඕනෑම කෝණයක බාහිර සමච්ඡේදකයෙන් කෝණය අඩංගු පාදවල අනුපාතය අනුව සම්මුඛ පාදය බාහිර ව බෙදේ.

(a)



(a)

දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ BAC කෝණයේ අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකයට D හි දී BC හමු වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$

නිර්මාණය : E හි දී දික්කළ BA හමුවන සේ C හරහා DA ට සමාන්තර රේඛාවක් ඇඳීම.

සාධනය : DA $\uparrow\uparrow$ CE

$D\hat{A}C = A\hat{C}E$ (ඒකාන්තර කෝණ)

$B\hat{A}D=A\hat{E}C$ (අනුරූප කෝණ)

$B\hat{A}D=D\hat{A}C$ (AD, $B\hat{A}C$ හි සමච්ඡේදකය නිසා)

$\therefore\ A\hat{C}E = A\hat{E}C$

$\therefore\ AE = AC$

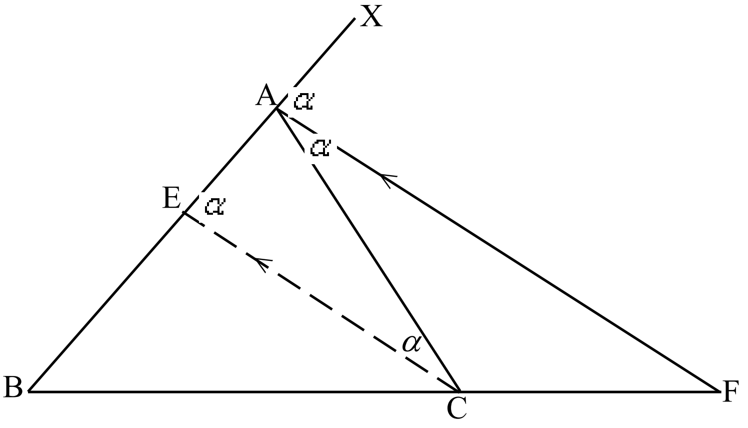
DA $\uparrow\uparrow$ CE නිසා,

$\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$

එහෙත් AE = AC නිසා,

$\frac{BA}{AC}=\frac{BD}{DC}$ වේ.

(b)



දත්තය : A කෝණයේ බාහිර සමච්ඡේදකයට දික් කළ BC, F හි දී හමු වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BF}{FC}$

නිර්මාණය : BA, E හි දී හමුවන සේ FA ට සමාන්තරව C හරහා CE රේඛාව ඇඳීම.

සාධනය : FA $\uparrow\uparrow$ CE නිසා,

$F\hat{A}C = A\hat{C}E$ (ඒකාන්තර කෝණ)

$X\hat{A}F = A\hat{E}C$ (අනුරූප කෝණ)

$X\hat{A}F = F\hat{A}C$ ($X\hat{A}C$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය AF වන නිසා)

$\therefore\ A\hat{C}E = A\hat{E}C$

$\therefore\ AE = AC$

FA $\uparrow\uparrow$ CE නිසා,

$\dfrac{BF}{CF}=\dfrac{BA}{AE}$ සහ AE = AC නිසා,

$\dfrac{BF}{CF}=\dfrac{BA}{AC}$

අභ්‍යාසය 9

1. PQRS, චතුරස්‍රයේ PQ // SR. PR හා QS පාද T හි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ.

   (i) PQT හා SRT ත්‍රිකෝණ සමරූපී බවත්

   (ii) $\frac{PR}{PT} = \frac{QS}{QT}$ බවත් පෙන්වන්න.

2. ABC ත්‍රිකෝණයේ A කෝණයේ අභ්‍යන්තර හා බාහිර කෝණ සමච්ඡේදකවලට පිළිවෙළින් X හි දී BC ද Y හි දී දික්කළ BC ද හමු වේ.

   AB = 7.2 cm, AC = 5.4 cm, BC = 3.5 cm නම්,

   (i) $BX : XC = 4 : 3$ බව පෙන්වන්න.

   (ii) $BY : YC$ සොයන්න.

3. PS යනු PQR ත්‍රිකෝණයේ මධ්‍යස්ථයකි. PSQ හා PSR කෝණවල සමච්ඡේදකවලට පිළිවෙළින් L හා M හි දී PQ හා PR පාද හමු වේ. LM හා QR එකිනෙක සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

4. ABCD චතුරස්‍රයේ BAC හා DAC කෝණවල සමච්ඡේදකවලට පිළිවෙළින් L හා M හි දී BC හා CD පාද හමු වේ. LM හා BD එකිනෙක සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

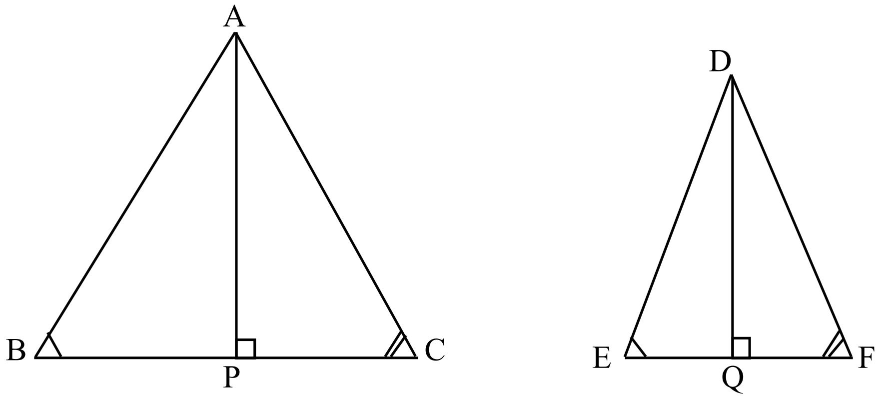
5. PQR ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් කේන්ද්‍රය I වේ. දික් කළ PI ට X හි දී QR හමු වේ.

   $PI : IX = PQ + PR : QR$ බව පෙන්වන්න.

10. වර්ගඵලය (සමරූපී ත්‍රිකෝණ)

10.1 ප්‍රමේයය :

සමරූපී ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල අතර අනුපාතය අනුරූප පාද මත සමචතුරස්‍රයන්ගේ වර්ගඵල අතර අනුපාතයට සමාන වේ.



දත්තය : ABC හා DEF ත්‍රිකෝණ සමරූපී වේ.

සාධනය කළ යුත්ත: $\dfrac{ABC \text{ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය}}{DEF \text{ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය}} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{CA^2}{FD^2} = \dfrac{AB^2}{DE^2}$ බව

නිර්මාණය : BC පාදයට ලම්බ වන සේ AP ද EF පාදයට ලම්බ වන සේ DQ ද අඳින්න.

සාධනය : APB හා DQE ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්,

$A\hat{B}P = D\hat{E}Q$ (දී ඇත)

$A\hat{P}B = D\hat{Q}E$ ($= 90^0$)

∴ ත්‍රිකෝණ දෙකේ අනුරූප තුන්වන කෝණ යුගලය ද සමාන වේ.

∴ APB හා DQE ත්‍රිකෝණ සමරූපී වේ.

$$\frac{AP}{DQ} = \frac{AB}{DE}$$

එහෙත් $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ ∵ ABC හා DEF ත්‍රිකෝණ සමරූපි බැවින්

$$\therefore \frac{AP}{DQ} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{ABC \text{ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය}}{DEF \text{ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AP}{\frac{1}{2} EF \times DQ}$$

$$= \frac{BC}{EF} \times \frac{AP}{DQ}$$

$= \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} \quad \left(\frac{AP}{DQ} = \frac{BC}{EF} \right)$ නිසා

$= \frac{BC^2}{EF^2}$

තවද ABC හා DEF ත්‍රිකෝණ සමරූපී නිසා $\frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$ බැවින්

$\frac{ABC\Delta}{DEF\Delta} = \frac{CA^2}{EF^2} = \frac{AB^2}{DE^2}$

අභ්‍යාසය 10

1. ABC සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ $\hat{A} = 90^0$ කි. A සිට BC ට ඇඳි ලම්බය AD වේ. $\Delta BAD : \Delta ACD = BA^2 : AC^2$ බව පෙන්වන්න.
2. ABCD ත්‍රපීසියමේ AB හා DC සමාන්තර පාද වේ. AD හා BD හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය O වේ. $AO = \frac{1}{4}$ AC නම් $\Delta AOB = \frac{1}{9} \Delta COD$ බව පෙන්වන්න.
3. ABC යනු A කෝණය සෘජුකෝණයක් වූ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයකි. ABD හා BCE සමපාද ත්‍රිකෝණ යුගලය ABC ත්‍රිකෝණයට පිටතින් පිළිවෙලින් AB සහ BC මත පිහිටා ඇත. $\Delta ABD : \Delta BCE = 1 : 2$ බව පෙන්වන්න.
4. ABCD ත්‍රපීසියමේ AB // CD වේ. එහි විකර්ණ O හි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. AB = 2CD නම් AOB සහ COD ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල අතර අනුපාතය සොයන්න.
5. ABC ත්‍රිකෝණයේ පිළිවෙලින් BC හා AC පාද මත X හා Y ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ XY // BC වන පරිදි ය. ΔAXY: XBCY ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය = 4 : 5 නම් $AX : XB = 2 : 1$ බව පෙන්වන්න.
6. ABC සුළුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ, BD හා CE උච්ච X හි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. පහත දැක්වෙන හිස්තැන් පුරවන්න.

   a) $\Delta ABD : \Delta ACE = BD^2 :$ ....

   b) $\Delta BXE : \Delta CXD =$ .... $: CD^2$

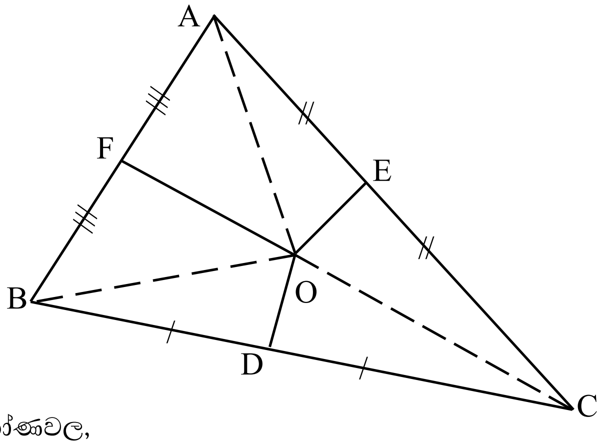
   c) $\Delta ABD :$ .... $= AD^2 : AE^2$

   d) $\Delta BXE :$ .... $= BX^2 : CX^2$

11. ත්‍රිකෝණ හා සම්බන්ධ සංගාමිතාව

11.1 ලම්බ සමච්ඡේදක

ත්‍රිකෝණයක එක් එක් පාදයේ ලම්බ සමච්ඡේදක ඒක ලක්ෂ්‍ය වේ.



දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ BC සහ CA පාදවලට ඇඳි ලම්බ සමච්ඡේදක O හි දී හමුවේ. ඒවා පිළිවෙලින් OD සහ OE වේ. F යනු BA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. OF යාකර ඇත.

සාධනය කළ යුත්ත : OF, BA ට ලම්බ බව.
නිර්මාණය : OA, OC යා කරන්න.
සාධනය : BDO සහ CDO ත්‍රිකෝණවල,

BD = CD (BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ.)
OD = OD (පොදු පාදය)
$B\hat{D}O = C\hat{D}O$ (=90^0 බව දී ඇත)
$\therefore \Delta BDO \equiv \Delta CDO$ (පා.කෝ.පා.)
$\therefore$ OB = OC (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප පාද)------(1)
එසේම $\Delta OCE \equiv \Delta OAE$ (පා.කෝ.පා.)
$\therefore$ OC = OA ---------------------------------------(2)
(1) න් හා (2) න් OA = OB.

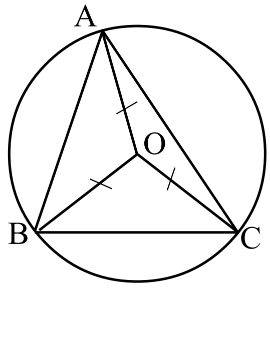
OAF සහ OBF ත්‍රිකෝණවල,
OA = OB (ඉහත සාධනය කර ඇත)
OF (පොදු පාදය)
AF = FB (AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F නිසා)
$\therefore \Delta OAF \equiv \Delta OBF$ (පා.පා.පා.)

$$O\hat{F}A = O\hat{F}B$$

තව ද $O\hat{F}A + O\hat{F}B = 180^0$

$$O\hat{F}A = O\hat{F}B = 90^0$$

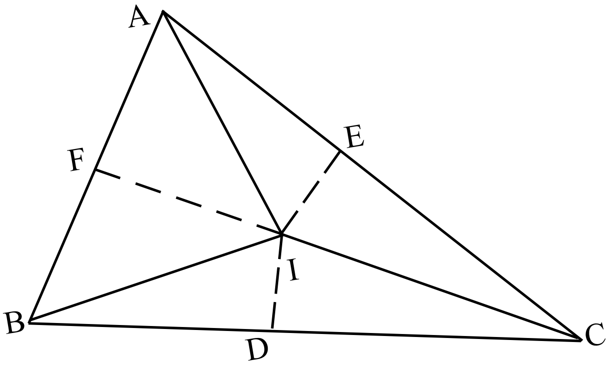
$\therefore$ OF $\perp$ AB



ඉහත සාධනයේ දී OA=OB=OC බව ලැබිණි. එනිසා O කේන්ද්‍රය වූ ද අරය OA හෝ OB හෝ OC වූ ද වෘත්තය A, B, C හරහා යයි. එම වෘත්තයට ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය යැයි කියනු ලබන අතර, O ට, ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිකේන්ද්‍රය යැයි කියනු ලැබේ.

11.2. කෝණ සමච්ඡේදක

ත්‍රිකෝණයක කෝණ තුනෙහි අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක ඒක ලක්ෂ්‍ය වේ.



දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ ABC හා ACB කෝණවල සමච්ඡේදක I හි දී හමුවේ. AI යා කර ඇත.

සාධනය කළ යුත්ත : AI මගින් BAC කෝණය සමච්ඡේදනය කරන බව.

නිර්මාණය : I සිට BC, CA සහ AB පාදවලට ඇඳි ලම්බ ID, IE සහ IF වේ.

සාධනය : BDI සහ BFI ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්

$I\hat{B}D = I\hat{B}F$ (ABC කෝණයේ සමච්ඡේදකය BI නිසා)

$B\hat{D}I = B\hat{F}I$ ($= 90^0$)

BI (පොදු පාදය)

$\Delta BDI \equiv \Delta BFI$ (කෝ.කෝ.පා.)

$\therefore$ ID = IF

එසේම $\Delta CDI \equiv \Delta CEI$ බව පෙන්විය හැක.

$\therefore$ ID = IE

(1) න් හා (2) න්, IE = IF.

AEI, AFI ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්,

IE = IF (ඉහත සාධනය කර ඇත)

IA (පොදු පාදය)

$I\hat{E}A = I\hat{F}A$ ($=90^0$)

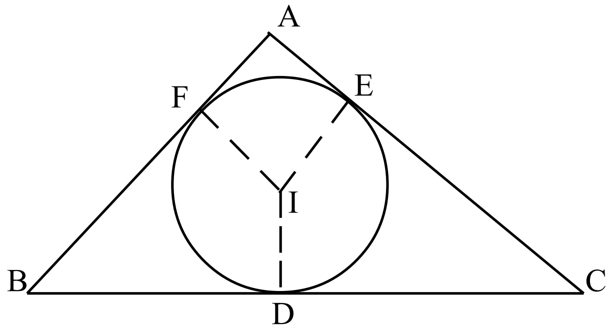
$\Delta AEI \equiv \Delta AFI$ (කර්ණ පා. අවස්ථාව)

$\therefore$ $E\hat{A}I = F\hat{A}I$

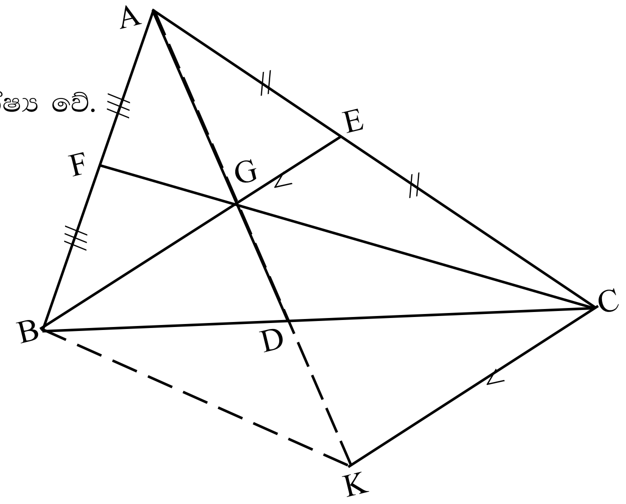
එනම්, IA මගින් BAC කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.

එනම් ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුනෙහි සමච්ඡේදක ඒක ලක්ෂ්‍ය වේ.

I, ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් කේන්ද්‍රය ලෙස හැඳින් වේ. I කේන්ද්‍රය වූ ද ID = IE = IF අරය වූ ද වෘත්තය අන්තර් වෘත්තය ලෙස හැඳින් වේ. එම වෘත්තයෙන් ත්‍රිකෝණයේ පාද තුන අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේ.



11.3. මධ්‍යස්ථ



ත්‍රිකෝණයක මධ්‍යස්ථ තුන ඒක ලක්ෂ්‍ය වේ.

දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ AC සහ AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් E සහ F වේ. BE සහ CF රේඛා G හි දී හමු වේ. දික්කළ AG රේඛාවට BC පාදය D හි දී හමුවේ.

සාධනය කළ යුත්ත : BD = DC බව.

නිර්මාණය : දික්කළ AD, K හි දී හමුවන සේ EB ට සමාන්තර රේඛාවක් C හරහා නිර්මාණය කරන්න. BK යා කරන්න.

සාධනය : AKC ත්‍රිකෝණයේ,

AE = EC (AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E වන නිසා)

EG // CK (නිර්මාණය)

∴ AG = GK (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය)

ABK ත්‍රිකෝණයේ,

AF = FB (AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F නිසා)

AG = GK (ඉහත සාධනය කර ඇත)

∴ FG // BK

CGBK චතුරස්‍රයේ,

CK // GB (නිර්මාණය)

BK // GC (ඉහත සාධනය කර ඇත)

∴ CGBK සමාන්තරාස්‍රයකි.

∴ BD = DC සහ GD = DK. (සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වන හෙයින්)

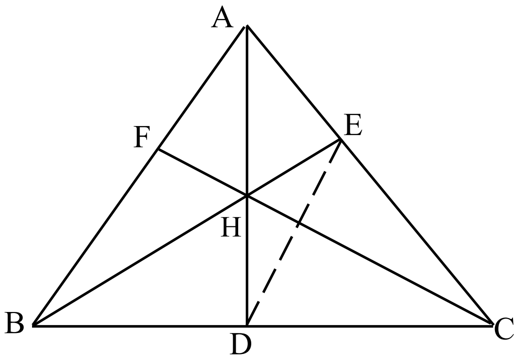
BD = DC නිසා AD , ABC ත්‍රිකෝණයේ මධ්‍යස්ථයක් වේ.

∴ ත්‍රිකෝණයක මධ්‍යස්ථ තුන ඒක ලක්ෂ්‍ය වේ.

ත්‍රිකෝණයක මධ්‍යස්ථ තුන හමුවන ලක්ෂ්‍යය (G) කේන්ද්‍රකය (Centroid) ලෙස හැඳින් වේ.

11.4. ත්‍රිකෝණයක උච්ච

ත්‍රිකෝණයක එක් එක් ශීර්ෂයේ සිට සම්මුඛ පාදයට අඳින ලද ලම්බ හෙවත් උච්ච ඒක ලක්ෂ්‍ය වේ.



දත්තය : BC, AC පාදවලට A, B ලක්ෂ්‍යවල සිට ඇඳි ලම්බ පිළිවෙළින් AD සහ BE වේ. එම ලම්බ දෙක H හි දී ඡේදනය වේ. යා කර දික්කරන ලද CH ට F හි දී AB හමු වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $CF \perp AB$.

නිර්මාණය : DE යා කරන්න.

සාධනය : DCEH චතුරස්‍රයේ,

$$C\hat{D}H + C\hat{E}H = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

$\therefore$ DCEH වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

$D\hat{E}C = D\hat{H}C$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ) ———— (1)

$D\hat{H}C = A\hat{H}F$

$A\hat{E}B = A\hat{D}B$ (90^0 නිසා)

AEDB වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

$A\hat{B}D = D\hat{E}C$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ) ————(2)

(1) න් හා(2) න්, $A\hat{B}D = D\hat{H}C$

$\therefore$ BDHF වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

$$H\hat{D}B + H\hat{F}B = 180^0$$

$$H\hat{F}B = 90^0 \quad (H\hat{D}B = 90^0 \text{ නිසා})$$

එනම්, $CF \perp AB$.

$\therefore$ AD, BE,CF උච්චයන් තුන H හි දී හමු වේ.

එනම් AD, BE, CF උච්ච ඒක ලක්ෂ්‍ය වේ.

H ලක්ෂ්‍යය ලම්බකේන්ද්‍රය ***(orthocentre)*** ලෙස හැඳින් වේ.

අභ්‍යාසය 11

1. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, AC පාද දික් කර ඇත. B හා C කෝණවල බාහිර කෝණ සමච්ඡේදක සහ A හි අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකය ඒක ලක්ෂ්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

12. පිළිතුරු

12.1 අභ්‍යාසය 1 සඳහා පිළිතුරු

1. $4a^2+12ab+9b^2$
2. $9a^2-24ab+16b^2$
3. $x^2+2+\frac{1}{x^2}$
4. $4x^2y^2+20xyz+25z^2$
5. $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}$
6. $x^2-2+\frac{1}{x^2}$
7. $\frac{a^2}{4}-2+\frac{4}{a^2}$
8. $\frac{1}{a^2}-\frac{4}{ab}+\frac{4}{b^2}$
9. $16x^2y^2-24xyz+9z^2$
10. $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$
11. $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$
12. $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$
13. $x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$
14. $x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$
15. $a^3b^3-6a^2b^2c+12abc^2-8c^3$
16. $\frac{1}{a^3}+\frac{3}{a^2b}+\frac{3}{ab^2}+\frac{1}{b^3}$
17. $\frac{1}{a^3}-\frac{6}{a^2b}+\frac{12}{ab^2}-\frac{8}{b^3}$
18. $8x^3y^3-36x^2y^2z+54xyz^2-27z^3$
19. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
20. $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$
21. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$
22. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac$
23. $a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ac$
24. $a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ac$
25. (i) 1 030 301 (ii) 7 762 392 (iii) 64 481 201 (iv) 997 002 299
26. (a) 4 000 000 (b) 1
27. (a) 1 000 000 (b) 8
29. (a) a^2 -2 (b) 8 -3a
30. 316
31. $-\frac{1}{27}$
32. -340
34. 14
35. 27
36. 427

12.2.1 අභ්‍යාසය 2.1 සඳහා පිළිතුරු

1. $(x-3)(x+2)$
2. $(x+12)(x-8)$
3. $(x+6)(x-1)$
4. $(x-6)(x+2)$

5. $(x+7)(x-6)$

6. $(x-3)(x-6)$

7. $(2x+3)(x+1)$

8. $(2x-3)(x-1)$

9. $(2x-1)(x+3)$

10. $(2x+1)(x-3)$

11. $(2+3x)(5+4x)$

12. $(5-2x)(3-x)$

13. $3(3x+8)(2x-9)$

14. $(2x-9)(3x-14)$

15. $(2x-3y)(x-y)$

16. $(3x+2y)(2x-3y)$

17. $(2x+y)(2x+3y)$

18. $(2a-b)(a-13b)$

19. $(8xy-3)(5xy+8)$

20. $(8x+5y)(4x-7y)$

21. $a(8a+5b)(3a-4b)$

22. $a(3a+2b)(6a-5b)$

23. $(a-2)(a-1)(a-8)(a+5)$

24. $(a+b+c-7)(a+b+c+4)$

25. $(2x+2y-9)(x+y+3)$

26. $(x+8y)(x+3y)$

27. $(x-a+2)(x+a-1)$

28. $(x+a-2)(x-a+1)$

29. $(x-a)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)$

30. $(x+a+b)(x+a-b)$

31. $(ax-1)(x+b)$

32. $(x+3a-b)(x-2a+b)$

33. $(2a^2+ab-2b^2)(2a^2-5ab-2b^2)$

34. $(a+12b)(12a-b)$

35. $(5x-y)(5y-x)$

12.2.2 අභ්‍යාසය 2.2 සඳහා පිළිතුරු

1. $(x-2y)(x+2y)$

2. $x(x-1)(x+1)$

3. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

4. $x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

5. $(2-3a)(2+3a)$

6. $(a-7b)(a-b)$

7. $(4-a-b)(4+a+b)$

8. $(3-a+b)(3+a-b)$

9. $3a(2a-b)(2a+b)$

10. $(1-a+b)(1+a-b)$

11. $(1-a-b)(1+a+b)$

12. $(x+y)(x-y-1)$

13. $(x-y)(x+y-1)$

14. $(x+y)(x-y+1)$

15. $(x-y)(x+y+1)$

16. $(a-b)(a+b-4)$

17. $(a-2-b)(a-2+b)$

18. $(b+c)(a-b-c)$

19. $(a-b)(a+b+1)$

20. $(x^2-y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$

21. $(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$

22. $(a^2+3b^2-ab)(a^2+3b^2+ab)$

23. $(x-2y-z)(x-2y+z)$

24. $(2a+b-x)(2a+b+x)$

25. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

26. $(2a+3b-ab)(2a+3b+ab)$

27.	199	28.	8800
29.	95.2	30.	24
31.	9901	32.	186
33.	144	34.	1
35.	0.25	36.	9991

12.2.3 අභ්‍යාසය 2.3 සඳහා පිළිතුරු

1. $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$
2. $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$
3. $(5a-4b)(25a^2+20ab+16b^2)$
4. $(2ab-c)(4a^2b^2+2abc+c^2)$
5. $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$
6. $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$
7. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)$
8. $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)$
9. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac+2bc)$
10. $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab-2bc+ac)$
11. $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab-ac-2bc)$
12. $(x+2y)(7x^2-8xy+4y^2)$
13. $2a(a^2+3b^2)$
14. $2b(3a^2+b^2)$
15. $(a+b)(2a+2b+1)(4a^2+4b^2+8ab-2a-2b+1)$
16. $(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^2)$
17. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
18. $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^4+3x^2+9)$
19. (a) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc)$

    (c) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

    (i) $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz)$

    (ii) $(2x+y+z)(4x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-yz)$

    (iii) $(x+2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2-2xy+2xz+6yz)$

    (iv) $(a-4b)(a^2+7b^2+4ab)$

    (v) $(2a+b-1)(4a^2+b^2+1-2ab+b+2a)$

21. (i) $3(a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $6(2x-3y)(3y-4z)(2z-x)$

(iii) $abc(b-c)(c-a)(a-b)$

(iv) $3(x-3y)(3y-4z)(4z-x)$

12.2.3 අභ්‍යාසය 3 සඳහා පිළිතුරු

1. $\frac{x+1}{2}$ 2. $\frac{-1}{(x+4)(x+5)}$ 3. $\frac{x+4}{(x-3)(x+2)(x+5)}$

4. $\frac{3}{x-3}$ 5. $\frac{x^2+3}{x+1}$ 6. 0

7. $\frac{-x-2}{(2x-1)(2x+1)(x-1)}$ 8. $\frac{4(a+1)}{(a-5)(a-4)(a+3)}$ 9. $\frac{a^2+4}{a^2-4}$

10. $\frac{2}{x^2-1}$ 11. $\frac{a}{a-c}$ 12. 2

13. $\frac{a^2-1}{a^2-4}$ 14. $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}$ 15. $\frac{1}{2a(a+b)}$

16. $\frac{a+1}{a-1}$ 17. $\frac{x(x-y+z)}{z(x+y+z)}$ 18. $\frac{ab}{a^2+b^2}$

19. $z=\frac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)}$ 20. $\frac{2t}{1+t^2}$ 21. $\frac{2a}{1-a^2}$

22. $\frac{7c+4}{5c+1}$

12.4.1.1 අභ්‍යාසය 4.1 සඳහා පිළිතුරු

1. $-\frac{3}{2}$ හෝ -1.5 2. 4 3. 37 4. (-10)

5. $\frac{156}{23}$ 6. -10 7. 8 9. -3

10. (- 2)

12.4.1.2 අභ්‍යාසය 4.2 සඳහා පිළිතුරු

1. $x=0$ or $x=\frac{2}{3}$ 2. -1, -3

3. $2, 6$ 4. $-\frac{1}{2}, 3$

5. $-\frac{1}{2}, 2$ 7. $-12, 9$

8. $\frac{5}{2}, 6$ 9. $-1, \frac{3}{2}$

10. $0, 4$ 11. $-17, -1$

12. $-3, \frac{7}{2}$ 13. $3+\sqrt{14}, 3-\sqrt{14}$

14. $\frac{-7-\sqrt{89}}{4}, \frac{-7+\sqrt{89}}{4}$ 15. $\frac{+3-\sqrt{65}}{4}, \frac{+3+\sqrt{65}}{4}$

16. $\frac{5-\sqrt{29}}{2}, \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

12.4.1.3 අභ්‍යාසය 4.3 සඳහා පිළිතුරු

1. $-4, -3, -2, -1$ 2. $2, 7$

3. $1, 2, -3, \pm\sqrt{7}$ 4. $-\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}$

5. $-\frac{62}{9}, 2$ 6. $4, 36$

7. $20, 125$ 8. $\frac{1}{4}, 4$

9. $-8, 1$ 10. $\frac{1}{27}, 8$

11. $-\frac{2}{5}, 1, \frac{-36-2\sqrt{15}}{11}, \frac{-36+2\sqrt{15}}{11}$ 12. $-\frac{4}{5}, \frac{9}{4}$

13. $-6, 0, \frac{-4-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$ 14. $-\frac{1}{2}, 2, \frac{-17+\sqrt{305}}{4}, \frac{-17-\sqrt{305}}{4}$

15. 1 16. $\frac{1}{3}, 3$

18. $\frac{1}{3}, 1, 3$ 19. $\frac{1}{3}, 1, 3$

20. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 2, 4$ 21. $-1, -\frac{1}{2}, 1, 2$

22. $-2, 0$ 23. $-1, 2$

24.	$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$	25.	-2
26.	3, $\frac{83}{17}$	27.	3, 7
28.	-3, 3	29.	-3, 2, 7
30.	$\frac{1}{2}$, 2	31.	$\frac{-5+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$

12.4.2 අභ්‍යාසය 4.4 සඳහා පිළිතුරු

1.	$x=-2,\ y=3$	2.	$x=1,\ y=-2$
3.	$x=3,\ y=-1$	4.	$x=2,\ y=-1$
5.	$x=5,\ y=\frac{1}{2}$	6.	$x=\frac{1}{7},\ y=\frac{1}{4}$
7.	$x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{3}$	8.	$x=-1,\ y=-\frac{2}{5}$
9.	$x=11,\ y=\frac{1}{2}$	10.	$x=2,\ y=-1$
11.	$x=a-b,\ y=b-a$	12.	$x=\frac{1}{4},\ y=-1$
13.	$x=5,\ y=9$	14.	$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{4}$
15.	$x=\frac{(a^2+b^2)}{2ab},\ \ y=\frac{-(a^2-2ab-b^2)}{2ab}$		

12.4.3 අභ්‍යාසය 4.5 සඳහා පිළිතුරු

1.	$\left.\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \end{array}\right\}$	2.	$\left.\begin{array}{l} x=-7 \\ y=-4 \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=3 \end{array}\right\}$
3.	$\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=-\frac{3}{5} \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=-3 \end{array}\right\}$	4.	$\left.\begin{array}{l} x=-4 \\ y=8 \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\}$
5.	$\left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=12 \end{array}\right\}$	6.	$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{3}{2} \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{13}{10} \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=-3 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=\sqrt{2} \\ y=-3 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=-\sqrt{2} \\ y=-3 \end{matrix}\right\}$

8. $\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{3}{5} \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=-6\pm\sqrt{143} \\ y=6\frac{\pm\sqrt{143}}{2} \end{matrix}\right\}$

9. $\left.\begin{matrix} x=-\frac{5}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=-1\pm\sqrt{21} \\ y=1\frac{\pm\sqrt{21}}{2} \end{matrix}\right\}$

13. $\left.\begin{matrix} x=-6 \\ y=\frac{5}{8} \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$

14. $x=\frac{84}{25}, \quad y=-25$

15. $\left.\begin{matrix} x=\frac{16}{9} \\ y=-\frac{3}{4} \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=-\frac{5}{3} \end{matrix}\right\}$

17. $x=\frac{10}{3},\ y=\frac{106}{33},\ z=\frac{52}{33}$

18. $x = 1,\ \ y = 2,\ \ z = -6$

21. $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=3 \\ z=5 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=-6 \\ y=1 \\ z=-3 \end{matrix}\right\}$

අභ්‍යාසය 5 සඳහා පිළිතුරු

1. (a) 6 (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{5}$
2. (a) $\frac{1}{100}$ (b) $\frac{1}{100}$ (c) $\frac{3}{2}$
3. (a) 216 (b) 13 (c) 5
4. 36
5. (a) 4 (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{7}$ (d) 6 (e) 4, -2 (f) 0, 1
6. (a) 4 (b) 4 (c) 4 (d) 3
7. (a) 1 (b) -1 (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2
8. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) -2
9. (a) -2 (b) $\frac{1}{3}$