ඉගෙනුම් ක්‍රියාවලියට අත්වැලක්

නිපුණතා මට්ටම 23.1

1. • අතාත්ත්වික ඒකකය i හඳුන්වා දී $i^2 = -1$ ලෙස පෙන්වයි.
   • $a \in R$ වන විට ai, ආකාරයේ සංඛ්‍යා හුදෙක් අතාත්ත්වික සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ලෙස හඳුන්වයි.

2. $a, b \in R$ සහ $i^2 = -1$ වන විට සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $z = a + ib$ ලෙස හඳුන්වයි.

3. • සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක a තාත්වික කොටස ලෙසත් එය $\text{Re}(z)$ ලෙසත් අංකනය කරයි.
   • සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක b අතාත්වික කොටස ලෙසත් එය $\text{Im}(z)$ ලෙසත් අංකනය කරයි.

4. $z_1 = a_1 + ib_1$ සහ $z_2 = a_2 + ib_2$ වන විට

   $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$ නම් ද

   නම් $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ හා $b_1 = b_2$ වේ.

නිපුණතා මට්ටම 23.2

1. $z_1 = a_1 + ib_2,\ z_2 = a_2 + ib_2$ සහ $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$ සහ $\lambda \in R$ නම්

   • $z_2 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

   • $\lambda z = \lambda(a + ib) = \lambda a + i\lambda b$

   • $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

   • $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_1 b_2)$

   • $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \left(\dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + i\left(\dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$ මෙහි $z_2 \neq 0$

2. සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක ගණිත කර්මවලින් සෑදෙන්නේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් බව පෙන්වා දෙයි.

3. සංකීර්ණ සංඛ්‍යා හා බැඳුණු මූලික ගණිත කර්ම සිදු කිරීමට සිසුන් යොමු කරවයි.

නිපුණතා මට්ටම 23.3

1. $z = a + ib,$

   නම් එවිට $z\left(\bar{z}\right)$ හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z} = a - ib$ හි මඟින් දක්වයි.

---

2. ප්‍රතිබද්ධතා බැඳුණු ලක්ෂණ ප්‍රකාශ කරයි.
   - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
   - $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
   - $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
   - $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)$

3. ඉහත ප්‍රතිඵලවල සාධනයට සිසුන් යොමු කරයි.
   ප්‍රතිබද්ධය හා බැඳුණු මූලික ලක්ෂණ භාවිතයට සිසුන් යොමු කරයි.

නිපුණතා මට්ටම 23.4

1. $x, y \in \mathbb{R}$ විට $z = x + yi$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් නම්

   $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

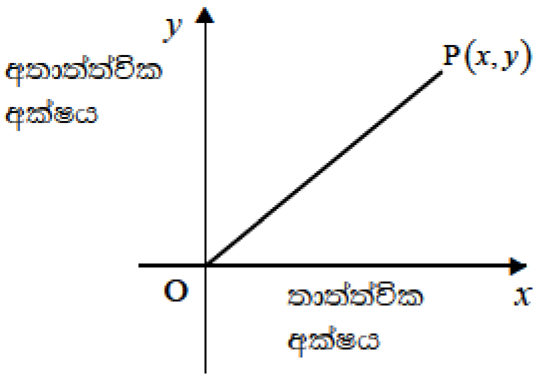
   $\mathbb{Z}$ හි මාපාංකය ($|\mathbb{Z}|$ ලෙස නිරූපණය කරයි.)

2. පහත ලක්ෂණ ප්‍රකාශ කරයි.
   - $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
   - $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ මෙහි $z_2 \neq 0$
   - $z.\bar{z} = |z|^2$
   - $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1.\bar{z}_2\right) + |z_2|^2$

3. ඉහත සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාපාංකය බැඳුණු ගුණ භාවිතයට සිසුන් යොමු කරයි.

<u>නිපුණතා මට්ටම 23.5</u>

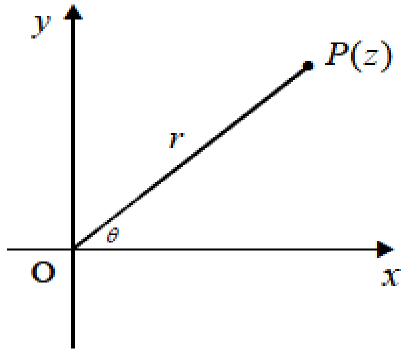
1. ආගන්ඩ් සටහන (සංකීර්ණ තලය) හඳුන්වා දෙන්න.
   සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් ආගන්ඩ් සටහනේ ලක්ෂ්‍යයකින් නිරූපණය කරන්න.
   $z = x + iy$ ලෙස ගන්න. එවිට $x, y \in \mathbb{R}$ එවිට $P(x, y)$ ලක්ෂ්‍යය ආගන්ඩ් සටහනේ z නිරූපණය කරයි.



2. දෙන ලද z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ගොඩනගන්න.
   - λz • $\bar{z}$
   - දෙන ලද z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහා $z_1 + z_2$ නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ගොඩනගන්න.

---

3. z යනු ශූන්‍ය නොවන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යයි ගනිමු.



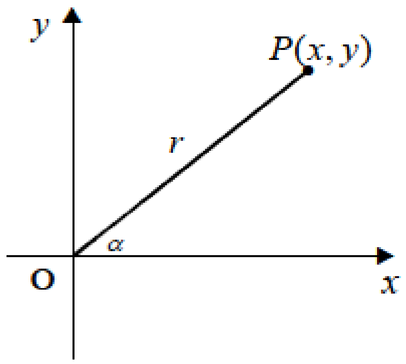
   එවිට $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; $r > 0$ සහ $\theta \in \mathbb{R}$

4. z යනු ශූන්‍ය නොවන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යයි ගනිමු.
   $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ හි θ කෝණය z හි විස්තාරය ලෙස හැඳින්වේ.
   $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ හි තෘප්ත කරන θ අගයන් $Arg\, z$ හි අංකනය කරයි.

5. z යනු ශූන්‍ය නොවන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යයි ගනිමු.
   $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ හි $-\pi < \theta \le \pi$ අගය $\text{Arg}\, z$ මගින් නිරූපණය කරයි.
   $\text{Arg}\, z$ යනු ප්‍රධාන විස්තාරය වේ.

---

6. $z = x+iy$ ශූන්‍ය නොවන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යයි ගනිමු.



$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

$$= r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

මෙහි $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ හා $\sin\alpha = \frac{y}{r}$

7. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ නම් එවිට

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

ආගන්ඩ් සටහනේ $z_1 z_2$ හා $\frac{z_1}{z_2}$ නිර්මාණය කරන අයුරු පෙන්වන්න.

8. දෙන ලද z_1, z_2, සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහා $\frac{\lambda z_1 + \mu z_2}{\lambda + \mu}$ නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ආගන්ඩ් සටහනේ ගොඩනගන්න. මෙහි $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

---

9. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ සඳහා $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ත්‍රිකෝණ අසමානතාව ලබා ගන්න.

10. $\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 - z_2|$ සඳහා $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ අපෝහනය කරන්න.

11. ඉහත අසමානතා භාවිත කර ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ට මඟ පෙන්වන්න.

<u>නිපුණතා මට්ටම 23.6</u>

1. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ නම් එවිට $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ මඟින් ප්‍රකාශ කරන දමුවාවර් ප්‍රමේයය ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය භාවිතයෙන් සාධනය කරයි.

2. දමුවාවර් ප්‍රමේයයේ සරල යෙදීම් ඇතුළත් ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ට මඟ පෙන්වන්න.

නිපුණතා මට්ටම 23.7

ඉගෙනුම් ඉගැන්වීම් ක්‍රියාවලිය සඳහා අත්වැලක් :

1. z, z_0, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙළින් $\mathrm{P}, \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ ලක්ෂ්‍යය නිරූපණය කරන්නේ යයි සිතමු.
   - z හි $|z - z_0| = r$ මඟින් නිරූපණය කරන P_0 හි පථය කේන්ද්‍රය P_0 වන අරය r වන නිරූපණය කරයි. මෙය පථයේ කාටිසියානු සමීකරණය ලබා ගන්න.
   - $\operatorname{Arg}(z - z_0) = \alpha$ සමීකරණය මඟින් දෙනු ලබන හි පථය PP_0 රේඛාව x අක්ෂයේ ධන දිශාව සමඟ α කෝණයක් සාදයි.
   - $|z - z_1| = |z - z_2|$ මඟින් නිරූපණය වන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක පථය $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ යා කරන රේඛාවේ ලම්බක සමච්ඡේදකය වන අතර එම රේඛාවේ කාටිසිය සමීකරණය ලබා ගනියි.

2. ඉහත පථවල කාටිසිය සමීකරණය ලබා ගනියි.