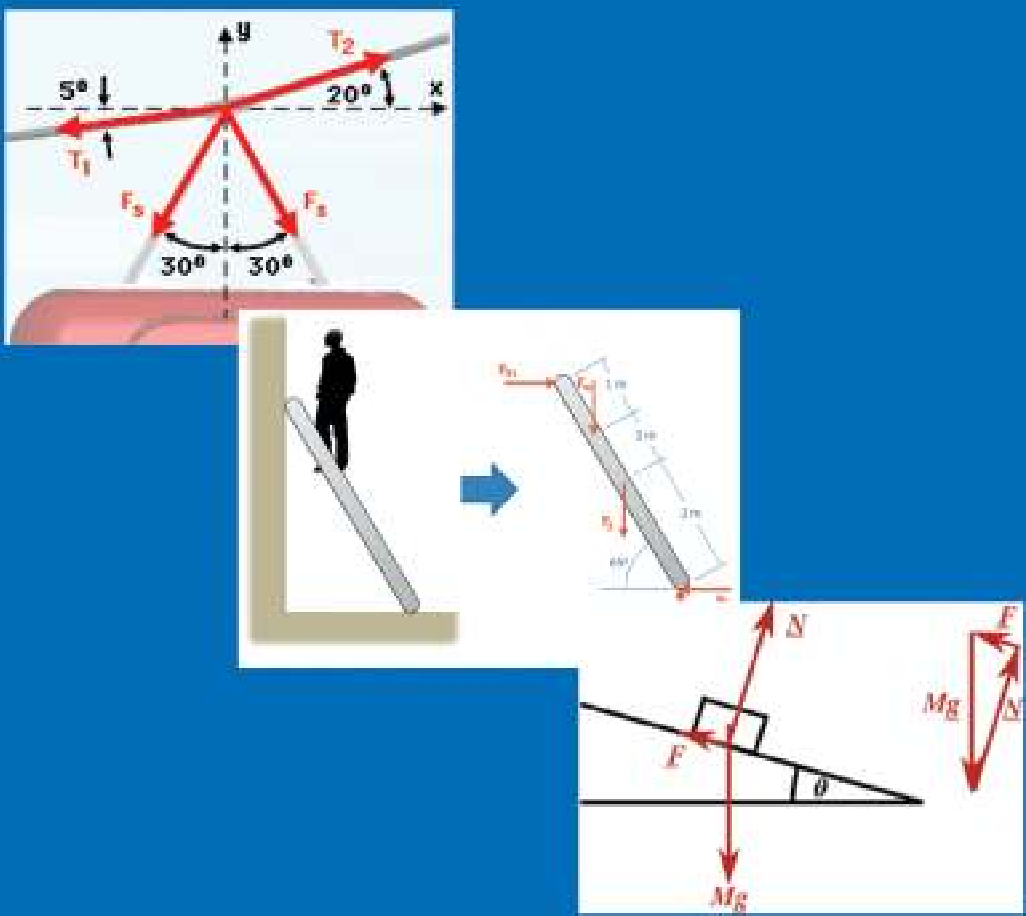
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ)

සංයුක්ත ගණිතය

ස්ථිතිතය - I

අතිරේක කියවීම් පොත

(2017 නව විෂය නිර්දේශයට අනුව සකස් කරන ලදී)



ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
ශ්‍රී ලංකාව
www.nie.lk

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ)

සංයුක්ත ගණිතය

ස්ථිතිකය - I

අතිරේක කියවීම් පොත

(2017 නව විෂය නිර්දේශයට අනුව සකස් කරන ලදී)

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
ශ්‍රී ලංකාව
www.nie.lk

සංයුක්ත ගණිතය
ස්ථිතිකය - I

ප්‍රථම මුද්‍රණය 2019

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

මුද්‍රණය :
මුද්‍රණාලය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
මහරගම

අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්තුමියගේ පණිවිඩය

ගණිත අධ්‍යාපනය සංවර්ධනය කිරීම සඳහා ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව විසින් කාලෝචිත ව විවිධ ක්‍රියා මාර්ග අනුගමනය කරමින් සිටී. ''**සංයුක්ත ගණිතය, ස්ථිතිකය - I**'' නමින් රචිත පොත එහි එක් ප්‍රතිඵලයකි.

දොළහ සහ දහතුන්වන ශ්‍රේණිවලවල විෂය නිර්දේශ හැදෑරීමෙන් පසු පැවැත්වෙන අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය සඳහා සිසුන් සූදානම් කිරීම පාසලේ ගුරුවරයාට පැවරෙන ප්‍රධාන කාර්යයකි. මේ සඳහා යෝග්‍ය ඇගයීම් උපකරණ බෙහෙවින් විරල වේ. වෙළෙඳපොලේ පවත්නා බොහොමයක් උපකරණ වලංගු බවින් හා ගුණාත්මක බවින් ඌන ප්‍රශ්නවලින් සමන්විත ප්‍රශ්න පත්‍රවලින් යුක්ත බව නොරහසකි. මෙම තත්ත්වය වළක්වා සිසුන්ට විභාගයට මනා ලෙස සූදානම් වීම සඳහා ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව මෙම සංයුක්ත ගණිතය ''**ස්ථිතිකය - I**'' සකස් කර ඇත. මෙය විෂය නිර්දේශයට අනුව සකසා, පූර්ව පරීක්ෂණයන්ට ලක් කර කරන ලද වටිනා ප්‍රශ්න ඇතුළත් ග්‍රන්ථයකි. ප්‍රශ්න සමඟ ඒවායේ උත්තර ඇතුළත් කර තිබීම ගුරුවරුන්ට මෙන් ම සිසුන්ට ද බෙහෙවින් ප්‍රයෝජනවත් වන බව නිසැක ය.

මෙම පොත පරිශීලනයෙන් ගණිත විෂයයේ ඇගයීම් ක්‍රියාවලිය සාර්ථක කර ගන්නා මෙන් ගුරුවරුන්ගෙන් ද, සිසුන්ගෙන් ද ඉල්ලා සිටිමි.

''**සංයුක්ත ගණිතය, ස්ථිතිකය - I**'' ඔබ අතට පත් කිරීම සඳහා අනුග්‍රහය දක් වූ AusAid ව්‍යාපෘතියටත්, මෙම කාර්යය සාර්ථක කර ගැනීමට ශාස්ත්‍රීය දායකත්වය සැපයූ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුවේ කාර්ය මණ්ඩලයට හා බාහිර විද්වතුන් සියලු දෙනාටත් මගේ ප්‍රණාමය හිමි වේ.

ආචාර්ය ටී. ඒ. ආර්. ජේ. ගුණසේකර
අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

අධ්‍යක්ෂතුමාගේ පණිවිඩය

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විෂයධාරාවන් අතර ගණිතය විෂයධාරාව සඳහා සුවිශේෂී ස්ථානයක් හිමිව ඇත. අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (සාමාන්‍ය පෙළ) විභාගයෙන් උසස් ලෙස සමත්වන සිසුන් විශේෂයෙන් ගණිත විෂය ධාරාවට ප්‍රිය කරයි. රටකට සහ ලෝකයට ඔබින නවෝත්පාදක රාශියක් බිහි කිරීමට දායක වූ විශේෂඥයින් බිහි කර ඇත්තේ උසස් පෙළ ගණිත විෂයධාරාව හැදෑරූ සිසුන් බව අතීතය මැනවින් සාක්ෂි දරයි.

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) ගණිත විෂයයන් සඳහා විෂයමාලාව සකස් කර ඇත්තේ විද්‍යාත්මක ලෝකයට, තාක්ෂණ ලෝකයට සහ වැඩලෝකයට අත්‍යවශ්‍ය විද්වතුන් බිහි කර දීමේ පරම චේතනාව ඇතිවයි.

වර්ෂ 2017 සිට උසස් පෙළ සංයුක්ත ගණිත විෂය සහ උසස් පෙළ ගණිත විෂය සඳහා සංශෝධිත නව විෂයමාලාවක් ක්‍රියාත්මක වේ. මෙම විෂයමාලාව ඉගෙන ගන්නා ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යයාවන්ගේ ඉගෙනුම පහසුව සඳහා පුහුණු ප්‍රශ්න සහ උත්තර ඇතුළත් පොතක් ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව විසින් සකස් කර ඇත. මෙම පොතේ ඇතුළත් ප්‍රශ්න සිසුන්ගේ සංකල්ප සාධන මට්ටම මැන බැලීමටත් ඉදිරියේ දී පවත්වන අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය සඳහා පෙර සූදානමටත් සුදුසු වන පරිදි සකස් කර ඇත. ප්‍රශ්නයට අදාළ උත්තර සපයා දීමෙන් බලාපොරොත්තු වන්නේ ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යයාවන් ප්‍රශ්නයක් සඳහා උත්තරය ලබාදීමේ දී අනුගමනය කළ යුතු පියවර සහ ක්‍රමවේද පිළිබඳ ව අත්දැකීමක් ලබා දීම යි. එමඟින් උත්තරය පෙළගැස්විය යුතු ආකාරය පිළිබඳ ව සිසුන්ට තම හැකියා, කුසලතා සහ දැනුම වැඩි දියුණු කර ගැනීමට හැකිවේ. මෙම ප්‍රශ්න සහ උත්තර සකස් කිරීමට විශේෂඥතාවයක් ඇති විශ්වවිද්‍යාල කථිකාචාර්යවරුන් ගුරුවරුන් සහ විෂයමාලා විශේෂඥයින්ගේ සම්පත් දායකත්වය ලබා දී ඇත. තවද මෙම ප්‍රශ්න සකස් කිරීමේ දී එක් එක් විෂය අන්තර්ගතයන් සඳහා විවිධ මාන ඔස්සේ ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යයාවන්ගේ අවධානය යොමු කිරීමටත්, සිසුන්ගේ දැනුම පුළුල් කර ගැනීමටත් අවස්ථාව ලබා දීමට හා මග පෙන්වීමට අවධානය යොමු කර ඇත. ගුරුවරුන්ගේ උපදෙස් සහ මග පෙන්වීම යටතේ මෙන් ම ස්වයංව ඉගෙනුම සඳහාත් උචිත ලෙස මෙම පොත සකස් කර ඇත.

මෙවැනි වටිනා පොතක් නිර්මාණය කිරීමට අවශ්‍ය උපදෙස් සහ මග පෙන්වීම ලබාදුන් ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්තුමියට සහ සම්පත් දායකත්වය දක්වූ සැමටත් ස්තුතියි. මෙම පොත භාවිත කර එමඟින් ලබන අත්දැකීම් තුළින් නැවත මුද්‍රණයක දී භාවිතයට සුදුසු ධනාත්මක අදහස් අප වෙත ලබා දෙන ලෙස ගෞරවයෙන් ඉල්ලා සිටිමි.

කේ. රංජිත් පත්මසිරි
අධ්‍යක්ෂ
ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

විෂයමාලා කමිටුව

අනුමැතිය :	ශාස්ත්‍රීය කටයුතු මණ්ඩලය, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
උපදේශකත්වය :	ආචාර්ය ටී. ඒ. ආර්. ජේ. ගුණසේකර මිය අධ්‍යක්ෂ ජනරාල් ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
අධීක්ෂණය :	කේ. රංජිත් පත්මසිරි මයා, අධ්‍යක්ෂ, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
විෂය සම්බන්ධීකරණය :	එස්. රාජේන්ද්‍රම් මයා ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය. කේ. කේ. වජීමා එස්. කංකානම්ගේ මෙනෙවිය සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.

සම්පත් දායකත්වය:

ජී. පී. එච්. ජගත් කුමාර මයා	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
එම්. නිල්මිණි පී. පීරිස් මිය	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
එස්. රාජේන්ද්‍රම් මයා	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
සී. සුදේශන් මයා	සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
පී. විජායිකුමාර් මයා	සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.
කේ.කේ.වජීමා එස්. කංකානම්ගේ මෙය	සහකාර කථිකාචාර්ය, ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය.

කර්තෘ මණ්ඩලය :

කේ. ගනේෂලිංගම් මයා	විශ්‍රාමික ප්‍රධාන ව්‍යාපෘති නිලධාරි ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
වී. රාජරත්නම් මයා	විශ්‍රාමික ගණිත ආචාර්ය

ටී. සිදම්බරනාදන් මයා	විශ්‍රාමික ගණිත ආචාර්ය
එන්. ආර්. සහබන්දු මයා	විශ්‍රාමික ගණිත ආචාර්ය
එච්. ඩී. සී. එස්. ප්‍රනාන්දු මයා	ගුරු සේවය, විවේකානන්ද විද්‍යාලය, කොළඹ 13
එස්. ජී. දොලුවීර මයා	ගුරු සේවය, වෙෂ්ලි විදුහල කොළඹ 09
භාෂා සංස්කරණය :	
මුද්‍රණය හා අධීක්ෂණය :	ඩබ්. එම්. යූ. විජේසූරිය වැ.බ අධ්‍යක්ෂ (මුද්‍රණ හා ප්‍රකාශන) ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
පරිගණක වදන් සැකසීම :	මොනිකා විජේකෝන්, විවෘත පාසල ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය ඉරේෂා රංගනා දිසානායක මෙනවිය මුද්‍රණාලය ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
පිටකවරය :	ඉරේෂා රංගනා දිසානායක මෙනවිය මුද්‍රණාලය ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
විවිධ සහාය :	එස්. හෙට්ටිආරච්චි මයා ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව කේ. එන්. සේනානි මිය ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව ආර්. එම්. රූපසිංහ මයා ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව

පෙරවදන

අධ්‍යාපන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) ශ්‍රේණිවල සංයුක්ත ගණිතය ඉගෙනුම ලබන සිසුන් පුහුණු වීම සඳහා මෙම පොත සකස් කර ඇත. සිසුන්ට ප්‍රමාණවත් අභ්‍යාස ලබා දීම සඳහාත්, විෂය ධාරාව හැදෑරූ පසු විභාගයට සූදානම් කිරීම පිණිස අභ්‍යාස කරවීමේ අරමුණෙන් මෙම පොත සකස් කර ඇත. මෙය ආදර්ශ ප්‍රශ්න පත්‍ර කට්ටලයක් නොවන බවත් අභ්‍යාස ප්‍රශ්නවල එකතුවක් බවත් සිසුන් ගුරුවරුන් වටහා ගත යුතුයි.

මෙම අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටලයේ අභ්‍යාස කළ පසු දී ඇති පිළිතුරු සමග තමන්ගේ පිළිතුරු සසඳා බැලිය හැකි ය. මෙහි දී ඇති ආකාරයේ ම සියලුම පියවර සිසුන්ගේ පිළිතුරුවල තිබීම අත්‍යවශ්‍ය නොවේ. ඔබේ පිළිතුරුවල නිවැරදිතාවය බැලීමටත් පියවර නිවැරදිව අනුගමනය කිරීමට මග පෙන්වීමක් ලෙස මෙහි පිළිතුරු දී ඇති බව වටහා ගන්න.

මෙම අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටලය වර්ෂ 2017 සිට ක්‍රියාත්මක වන සංශෝධිත විෂය මාලාවට අනුව 2019 අවුරුද්දේ ප්‍රථම වරට අ.පො.ස (උ.පෙළ) විභාගයට පෙනී සිටින සිසුන් ඉලක්ක කරගෙන සකස් කර ඇත. නමුත් සංයුක්ත ගණිතය, උසස් ගණිතය, ගණිතය වැනි විෂයන් හදාරන තමන්ගේ විෂයධාරාවට අනුව ප්‍රශ්න කට්ටලය භාවිත කළ හැකි ය.

ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනයේ ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව විසින් එළි දක්වන අ.පො.ස (උ.පෙළ) සඳහා වූ ප්‍රථම අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටලයට අමතරව ස්ථිතිකය - I ස්ථිතිකය - II, සංයුක්ත ගණිතය I, සංයුක්ත ගණිතය II සඳහා ඒකක අනුව සකස් කළ අභ්‍යාස ප්‍රශ්න කට්ටල ඉක්මනින් එළි දැක්වීමට නියමිතය.

මෙම පොතෙහි ඇති අඩුපාඩු සම්බන්ධව අදහස් අප වෙත යොමු කරන්නේ නම් නැවත මුද්‍රණයේ දී සකස් කිරීමට හැකි වේ. ඔබේ අදහස් අප මහත් අගය කොට සලකන බවත් මෙයින් දන්වා සිටිමි.

එස්. රාජේන්ද්‍රම් මයා
ව්‍යාපෘති නායක
12 - 13 ශ්‍රේණි ගණිතය

පටුන

පිටුව

1.0 දෛශික

1.1 අදිශ රාශි

අදාළ ඒකක සමග සංඛ්‍යා මගින් මුළුමනින් ම නිර්ණය කළ හැකි රාශි අදිශ රාශි යයි කියනු ලැබේ.

දුර, කාලය, ස්කන්ධය, පරිමාව, උෂ්ණත්වය අදිශ රාශි වේ.

තව ද, එක ම වර්ගයේ රාශි දෙකක් ආකලනයේ දී එම වර්ගයේ ම තවත් රාශියක් ලැබේ.

උදාහරණ :

ස්කන්ධය 10 kg වේ. උෂ්ණත්වය 27° C වේ. කාලය 20 s වේ. දුර 2 m වේ. වර්ගඵලය $5\ m^2$ වේ. පරිමාව $4\ m^3$ වේ. ධාරිතාව $2\,l$ වේ. වේගය $5\ m\ s^{-1}$ වේ. ඉහත උදාහරණවල ඒකක රහිත **සංඛ්‍යාත්මක** කොටස අදිශ යයි කියනු ලැබේ.

ඒකක සමග විශාලත්වය පමණක් ඇති ව සම්පූර්ණයෙන් විස්තර කළ නොහැකි රාශි ද වේ. ඒවා සම්පූර්ණයෙන් ම දැක්විය හැක්කේ විශාලත්වය හා දිශාව වන දෙක ම ඇසුරිනි.

i) උදාහරණයක් ලෙස නැවක් $15\ km\ h^{-1}$ වේගයෙන් උතුරු දෙසට ගමන් කරයි.

ii) අංශුවක් මත නිව්ටන් 20ක බලයක් සිරස් ලෙස පහළට ක්‍රියා කරයි.

දෛශික පිළිබඳ ව අධ්‍යයනය ප්‍රථම වරට යොමු වූයේ 19 වන සියවස මැද භාගයේ දී ය. මෑත අතීතයේ දී දෛශික නැතිම බැරි උපකරණයක් බවට පත් ව ඇත. ගණිතඥයෝ භෞතික විද්‍යාඥයෝ ජ්‍යාමිතික හා භෞතික ගැටලු සංක්ෂිප්ත ව ඉදිරිපත් කිරීමට දෛශික භාවිත කරති. ඉංජිනේරුවන්ගේ ගණිතමය සුළු කිරීම් සඳහා ද දෛශික යොදා ගනී.

1.2 දෛශික රාශි

ඒකක සහිත ව විශාලත්වය හා දිශාව මගින් සම්පූර්ණයෙන් විස්තර කළ හැකි රාශියක් දෛශික රාශියක් ලෙස හඳුන්වමු.

උදාහරණ :

i. උතුරු දෙසට විස්ථාපනය 5 m වේ.

ii. ගිනිකොන දෙසට $15\ m\ s^{-1}$ ප්‍රවේගයකි.

iii. 30 N භාරයක් සිරස් ව පහළට පවතී.

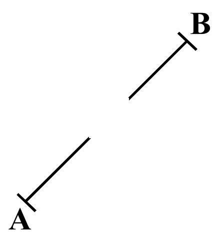
iv. 10 N බලයක් තිරසට 30°ක කෝණයක් ඉහළ දිශාවට පවතී.

දෛශික සඳහා විශාලත්වයක් දිශාවත් යන 2 ම පවතී.

1.3 දෛශිකවල නිරූපණය

දෛශික නිරූපණය සඳහා ක්‍රම දෙකක් වේ.

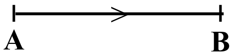
ජ්‍යාමිතික නිරූපණය



දෛශිකයක් $\overrightarrow{AB}$ දිශාගත රේඛා ඛණ්ඩයක් මගින් නිරූපණය කළ හැකිය. රේඛා ඛණ්ඩයේ දිග දෛශිකයේ විශාලත්වය ලබා දේ. එය මත ඊ හිස දිශාව නිරූපණය කරයි. මෙය දෛශිකයේ ජ්‍යාමිතික නිරූපණය ලෙස දක්වනු ලැබේ.

උදාහරණ :

නැගෙනහිරට 4 N බලයක් දැක්වීමට නැගෙනහිර දෙසට $AB = 4$ ඒකක වන සේ රේඛා ඛණ්ඩය අඳිනු ලැබේ. බලයේ දිශාව A සිට B දක්වා (රූපයේ දැක්වෙන පරිදි) ඊතලය මගින් දක්වමු.



වීජීය නිරූපණය

$\overrightarrow{AB}$ දෛශිකය තනි වීජීය සංකේතයක් ($\underline{a}$, $\bar{a}$ වැනි) මගින් දක්වමු. සමහර පාඨ ග්‍රන්ථවල **a** තද කළු අකුරින් දැක්වෙන සංකේතයකින් සාමාන්‍යයෙන් දක්වනු ලැබේ.

1.4 දෛශිකයක මාපාංකය

දෛශිකයක විශාලත්වය එහි මාපාංකය මගින් හඳුන්වනු ලැබේ.

$\overrightarrow{AB}$ හෝ $\underline{a}$ දෛශිකයේ මාපාංකය $|\overrightarrow{AB}|$ හෝ $|\underline{a}|$ හෝ ලෙස දක්වමු.

දෛශිකයක මාපාංකය හැම විට ම සෘණ නොවේ.

1.5 දෛශික දෙකක සමානතාව

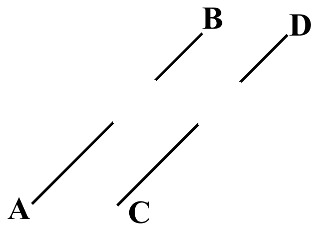
දෛශික දෙකක් විශාලත්වයෙන් සමාන ව එක ම දිශාවට වේ නම් ඒවා සමාන දෛශික යයි කියනු ලැබේ.

$\overrightarrow{AB}$ $(=\underline{a})$ හා $\overrightarrow{CD}$ $(=\underline{b})$ දෛශික දෙක සමාන වන්නේ

i) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

ii) $AB \parallel CD$ හා

(iii) $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{CD}$ එක ම දිශාවට වන්නේ නම් ම පමණි.



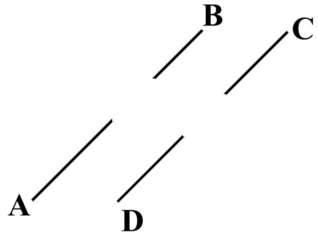
සටහන : $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{CD}$ දෛශික සලකන්න.

$AB = CD$ එනම් $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

$AB \parallel CD$

එහෙත් ඒවා එක ම දිශාවට නොවේ.

එම නිසා $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$; $\underline{a} \neq \underline{b}$



1.6 ඒකක දෛශික

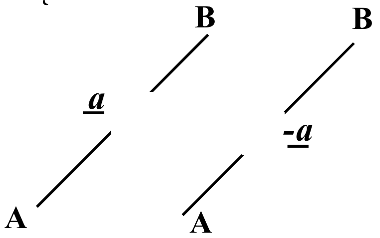
ඒකක විශාලත්වයෙන් යුත් දෛශිකයක් ඒකක දෛශිකයක් යයි කියනු ලැබේ. දෙන ලද $\underline{a}$, දිශාවට ඒකක දෛශිකය $\frac{1}{|\underline{a}|}\cdot\underline{a}$ මගින් දක්වමු.

1.7 අභිශූන්‍ය දෛශිකය

විශාලත්වය ශූන්‍ය වන දෛශිකයට අභිශූන්‍ය දෛශිකයක් යයි කියනු ලැබේ. එය **0** මගින් දක්වනු ලැබේ. $|\mathbf{0}| = 0$ හා එහි දිශාව අභිමත වේ. එය ලක්ෂ්‍යයක් මගින් දක්වනු ලැබේ.

1.8 දෙන ලද දෛශිකයක ඍණ දෛශිකය

$\overrightarrow{AB}$ දෙන ලද දෛශිකය සඳහා $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ හි ඍණ දෛශිකය වේ. එය $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ලෙස ලියයි.



$\overrightarrow{AB} = \underline{\boldsymbol{a}}$, නම් එවිට $\overrightarrow{BA} = -\underline{\boldsymbol{a}}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$, $|\underline{a}| = |-\underline{a}|$

1.9 දෛශිකයක් අදිශයකින් ගුණ කිරීම

$\underline{\boldsymbol{a}}$ දෛශිකයක් ද λ අදිශයක් ද විට λ අදිශයේ හා $\underline{\boldsymbol{a}}$ දෛශිකයේ ගුණිතය $\lambda\,\underline{\boldsymbol{a}}$ වේ. මෙහි λ. එනම් $\lambda > \mathbf{O}$, $\lambda = \mathbf{O}$ හා $\lambda < \mathbf{O}$ අවස්ථා තුන යටතේ සලකා බැලිය යුතු ය.

අවස්ථාව

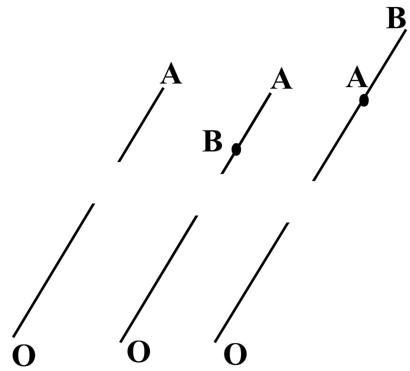
(i) $\lambda > 0$

$\overrightarrow{OA} = \underline{\boldsymbol{a}}$, ලෙස ගනිමු.

$OB = \lambda OA$ වන සේ OA මත හෝ

දික් කළ OA මත B ලක්ෂ්‍ය ගනිමු

$\overrightarrow{OB} = \lambda\,\overrightarrow{OA} = \lambda\underline{\mathbf{a}}$



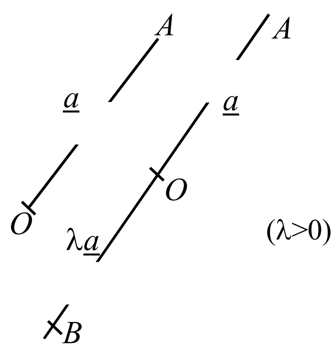
$0 < \lambda < 1$ $\lambda > 1$

(ii) $\lambda = 0$, විට $\lambda\underline{\mathbf{a}}$ අභිශූන්‍ය දෛශිකය ලෙස අර්ථ දක්වමු.

එනම් $\lambda\underline{\mathbf{a}} = 0\underline{\mathbf{a}} = \boldsymbol{0}$

(iii) $\lambda < 0$

මේ අවස්ථාවේ $\underline{\boldsymbol{a}}$ හි දිශාවට විරුද්ධ දිශාවට වූ $\underline{\boldsymbol{a}}$ මෙන් $|\lambda|$ ගුණයක් විශාල වූ දෛශිකයක් වේ. එවිට $OB = |\lambda|OA$. $\overrightarrow{OB} = \lambda\underline{\boldsymbol{a}}$. වේ.



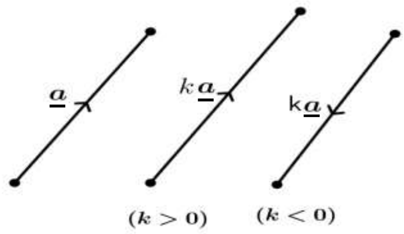
දික් කරන ලද AO මත B ලක්ෂ්‍ය තෝරා ගනිමු.

1.10 සමාන්තර දෛශික

දෙන ලද $\underline{a}$ හා k$\underline{a}$, k$\underline{a}$ දෛශික $\underline{a}$ ට සමාන්තර ව පවතී.

(i) $k > 0$, විට k$\underline{a}$ දෛශිකය $\underline{a}$හි දිශාවට වේ.

(ii) $k < 0$, විට k$\underline{a}$ දෛශිකය $\underline{a}$.හි දිශාවට ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවට වේ.



$\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දෛශික දෙක සමාන්තර යයි කියනු ලබන්නේ $\underline{b} = \lambda\underline{a}$

1.11 දෛශික ආකලනය

$\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දෛශික $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{BC}$ මඟින් පිළිවෙළින් නිරූපණය කරයි නම් එවිට $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දෛශිකවල එකතුව $\overrightarrow{AC}$ මඟින් නිරූපණය වේ.

එනම් $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

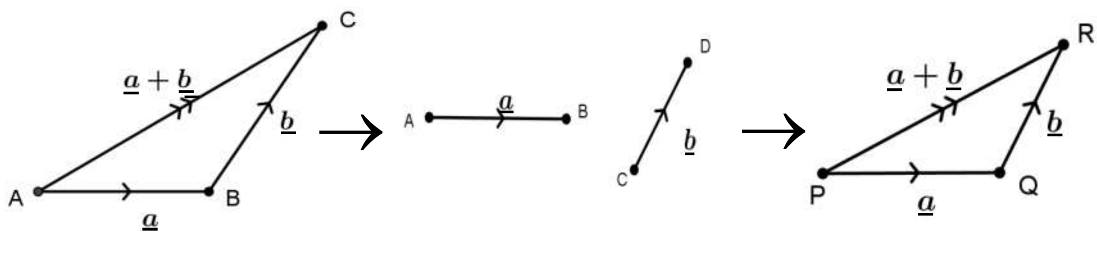
$= \underline{a} + \underline{b}$

මෙයට දෛශික ආකලනයේ ත්‍රිකෝණ නීතිය යයි කියනු ලැබේ.

$\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{CD} = \underline{b}$ දෛශික දෙකක් යයි ගනිමු.

$PQ = AB$ හා $PQ // AB$ වන සේ PQ රේඛා කණ්ඩය අඳින්න.

$QR = CD$ හා $QR // CD$ වන සේ QR රේඛා ඛණ්ඩය අඳින්න.



අර්ථ දැක්වීමෙන් $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{QR} = \underline{b}$

ආකලනය පිළිබඳ ත්‍රිකෝණ නීතියට අනුව

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underline{a} + \underline{b}$

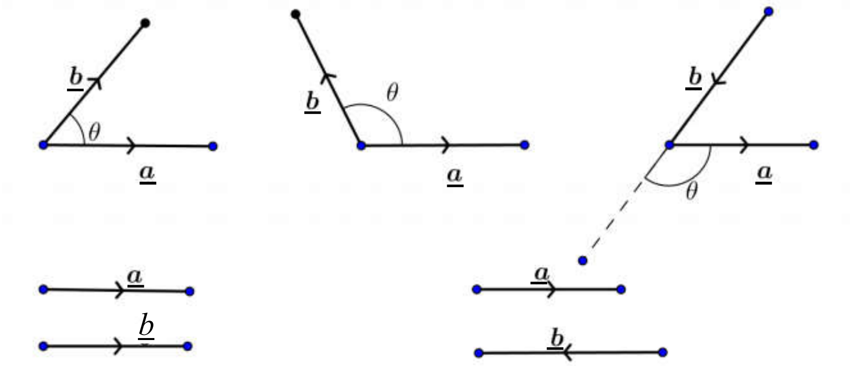
1.12 දෛශිකයක අර්ථ දැක්වීම

දෛශිකයකට විශාලත්වයක් හා දිශාවක් ඇති අතර ආකලනය පිළිබඳ ත්‍රිකෝණ නීතිය පිළිපැදිය යුතු වේ.

1.13 දෛශික දෙකක් අතර කෝණය

$\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ දෛශික දෙකක් යයි සිතමු.

$\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ අතර කෝණය පහත දැක්වේ.



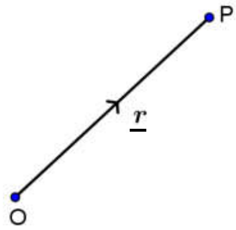
$0 \leq \theta \leq \pi$ වේ.

$\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ සමාන්තර හා එක ම දිශාවට වේ නම් එවිට $\theta = \mathbf{0}$.

$\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ සමාන්තර හා ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවට වෙනස් නම් එවිට $\theta = \pi$.

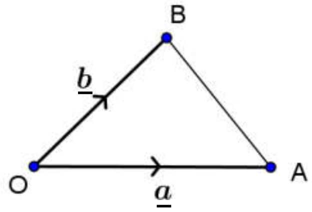
1.14 පිහිටුම් දෛශික

මූලය ලෙස තෝරාගන්නා O අචල ලක්ෂ්‍යය සමඟ ඕනෑම P ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම $\overrightarrow{OP}$ මඟින් දැක්විය හැකිය.



$\overrightarrow{OP} = \underline{\boldsymbol{r}}$ මූලයට අනුබද්ධ P හි පිහිටුම් දෛශිකය ලෙස හඳුන්වනු ලැබේ.

A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහි පිහිටුම් දෛශික $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ ලෙස ගනිමු.



$\overrightarrow{OA} = \underline{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{\boldsymbol{b}}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= \underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}}$$

1.15 දෛශික වීජයෙහි නීති

$\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{c}}$ දෛශික යයි ද λ හා μ අදිශ යයිද ගනිමු

(i) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (න්‍යාදේශ න්‍යාය)

(ii) $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ (සංඝටන න්‍යාය)

(iii) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$ (විසටන න්‍යායය)

(iv) $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a} = \underline{0} + \underline{a}$

(v) $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0} = (-\underline{a}) + \underline{a}$

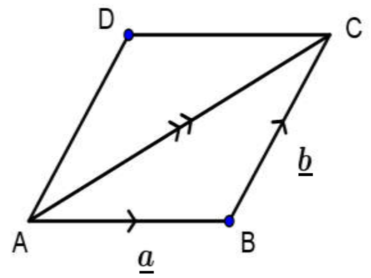
(vi) $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$

(vii) $\lambda\mu(\underline{a}) = \lambda(\mu\underline{a}) = \mu(\lambda\underline{a})$

සාධනය

(i) $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$ ලෙස ගනිමු

ABCD සමාන්තරාස්‍රය සම්පූර්ණ කළ විට



දැන් $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \underline{a}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \underline{b}$

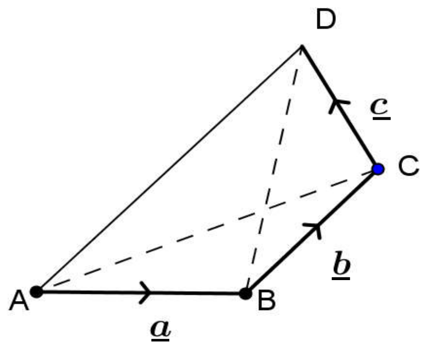
දෛශික ආකලනය පිළිබඳ ත්‍රිකෝණ නීතියෙන්

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \underline{b} + \underline{a}$

එනයින් $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

(ii) $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$ සහ $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

$= \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ .... ①

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

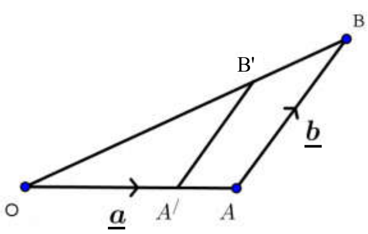
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}$

$= (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ ....②

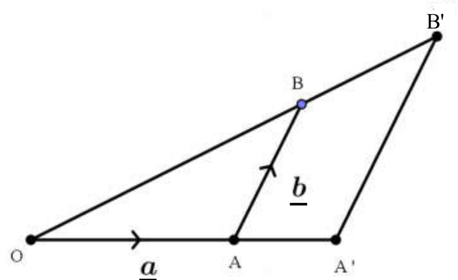
(1) හා (2), $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

(iii) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda$ b

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ හා



$0 < \lambda < 1$



$\lambda > 1$

A' ලක්ෂ්‍යය OA මත (හෝ දික්කල OA) මත තෝරා ගනිමු

$\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA} = \lambda \underline{\mathbf{a}}$

AB ට සමාන්තරව A' හරහා ඇඳි රේඛාවට OB රේඛාව හෝ දික් කරන ලද OB රේඛාව B' හිදී හමු වේ.

දැන් , ΔOAB, ΔOA'B' ත්‍රිකෝණ සමරූපී වේ.

$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \lambda.$

$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB} = \lambda \underline{\boldsymbol{b}}$ හා $\overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OB}$ .... ①

$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = \lambda \underline{\boldsymbol{a}} + \lambda \underline{\mathbf{b}}$ ....②

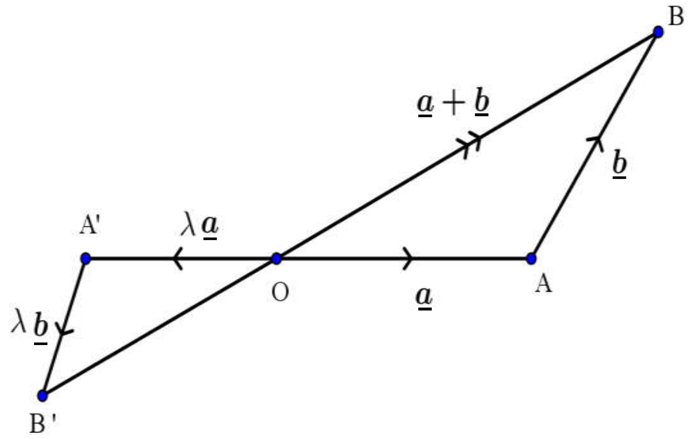
$\lambda \overrightarrow{OB} = \lambda(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = \lambda(\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\mathbf{b}})$ ....③

(1) $\overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OB}$

(2) හා (3)

$\lambda \underline{\boldsymbol{a}} + \lambda \underline{\mathbf{b}} = \lambda(\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\mathbf{b}})$

$\boldsymbol{\lambda < 0}$ විට



$\overrightarrow{OA} = \underline{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{\boldsymbol{b}}$, $\overrightarrow{OA'} = \lambda \underline{a}$

BA ට සමාන්තරව A'B' ඇන්ද විට දික්කල BO, B' හිදී හමුවේ. $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \underline{\mathbf{b}}$ හා $\overrightarrow{OB'} = \lambda \underline{\boldsymbol{a}} + \lambda \underline{\mathbf{b}}$

සමරූපී ත්‍රිකෝණ ලක්ෂණවලින් හා දෛශික ගුණවලින්

$\lambda(\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\mathbf{b}}) = \lambda \underline{\boldsymbol{a}} + \lambda \underline{\mathbf{b}}$, $\lambda < 0$

(iv) $\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{0}} = \underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{AB} = \underline{\boldsymbol{a}}$ ලෙස ගනිමු

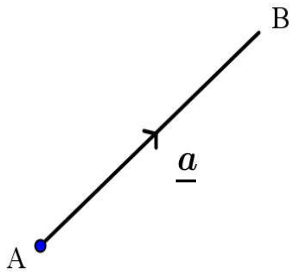
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB}$

$\underline{\boldsymbol{a}} \quad = \quad \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{0}}$ .... ①

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$

$\underline{\boldsymbol{a}} \quad = \quad \underline{\boldsymbol{0}} + \underline{\boldsymbol{a}}$ .... ②

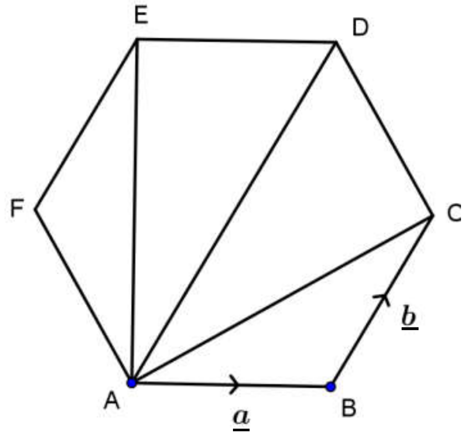
(1) හා (2) $\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{0}} = \underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{0}} + \underline{\boldsymbol{a}}$



1.16 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණ 1

ABCDEF සවිධි ෂඩාස්‍රයකි $\overrightarrow{AB} = \underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\overrightarrow{BC} = \underline{\boldsymbol{b}}$, නම් $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ හා $\overrightarrow{AF}$ දෛශික $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ පදවලින් සොයන්න.



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}$.

ජ්‍යාමිතියෙන් AD = 2BC; AD // BC

$\therefore \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = 2\underline{\boldsymbol{b}}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$

$= 2\underline{\boldsymbol{b}} + (-\underline{\boldsymbol{a}}) = 2\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}}$

ජ්‍යාමිතියෙන් BC = FE; BC // FE

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC} = \underline{\boldsymbol{b}}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = (2\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}}) - \underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}}$

උදාහරණ 2

A හා B ලක්‍ෂවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ වේ.

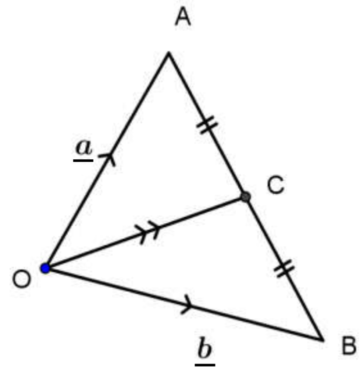
(i) C , ABහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.

(ii) D , AB මත AD : DB = 1 : 2 වන පරිදි වේ

(iii) E , AB මත AE : EB = 2 : 1 වන පරිදි වේ

Cහි, Dහි හා E හි පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

$\overrightarrow{OA} = \underline{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{\boldsymbol{b}}$. ලෙස ගනිමු එවිට $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overline{O}$



(i) AC = CB

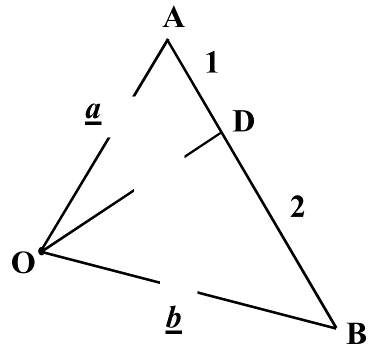
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \underline{\boldsymbol{a}} + \frac{1}{2}(\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}})$

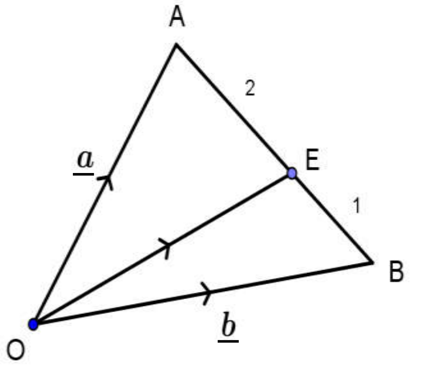
$= \frac{1}{2}(\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$

(ii) $AD : DB = 1 : 2$



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$
$$= \underline{\boldsymbol{a}} + \frac{1}{3}(\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}})$$
$$= \frac{2}{3}\underline{\boldsymbol{a}} + \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{3}(2\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$$

(iii)



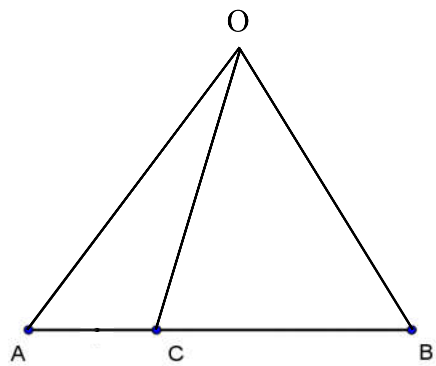
$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$
$$= \underline{\boldsymbol{a}} + \frac{2}{3}(\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}})$$
$$= \frac{1}{3}\underline{\boldsymbol{a}} + \frac{2}{3}\underline{\boldsymbol{b}}$$
$$= \frac{1}{3}(\underline{\boldsymbol{a}} + 2\underline{\boldsymbol{b}})$$

උදාහරණ 3

$-2\underline{\boldsymbol{p}} + 5\underline{\boldsymbol{q}}$, $7\underline{\boldsymbol{p}} - \underline{\boldsymbol{q}}$ හා $\underline{\boldsymbol{p}} + 3\underline{\boldsymbol{q}}$ යනු පිළිවෙළින් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනෙහි අචල O, මූලයට අනුබද්ධව පිහිටුම් දෛශික යයි ගනිමු. මෙහි $\underline{\boldsymbol{p}}$ හා $\underline{\boldsymbol{q}}$ සමාන්තර නොවන දෛශික දෙකකි. A, B හා C ඒක රේඛීය බව පෙන්වා C මඟින් AB බෙදන අනුපාතය සොයන්න.

$\overrightarrow{OA}$ **$= -2\underline{p} + 5\underline{q}$,** $\overrightarrow{OB}$ **$= 7\underline{p} - \underline{q}$,** $\overrightarrow{OC}$ **$= \underline{p} + 3\underline{q}$**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (7\underline{p} - \underline{q}) - (-2\underline{p} + 5\underline{q})$$
$$= 9\underline{p} - 6\underline{q}$$



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (\underline{p} + 3\underline{q}) - (-2\underline{p} + 5\underline{q})$$
$$= 3\underline{p} - 2\underline{q}$$

$$\overrightarrow{AB} = 3(3\underline{p} - 2\underline{q})$$

$$\overrightarrow{AC} = 3\underline{p} - 2\underline{q} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{AC}$$

එම නිසා A, B හා C ඒක රේඛීය වන අතර $AC : CB = 1 : 2$

උදාහරණ 4

$\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}$ අභිශූන්‍ය නොවන සමාන්තර නොවන දෛශික හා α, β අදිශ වේ. $\alpha\underline{\boldsymbol{a}} + \beta\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{0}}$ නම් හා නම් ම පමණක් $\alpha = 0$ හා $\beta = 0$ බව ඔප්පු කරන්න.

$\alpha = 0$ හා $\beta = 0$ යයි සිතමු

$\alpha\underline{\boldsymbol{a}} + \beta\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{0}} + \underline{\boldsymbol{0}} = \underline{\boldsymbol{0}}$.

විලෝම වශයෙන් $\alpha\underline{\boldsymbol{a}} + \beta\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{0}}$ ලෙස ගනිමු

(i) අවස්ථාව : $\alpha = 0$ ලෙස ගනිමු

එවිට $\underline{\boldsymbol{0}} + \beta\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{0}}$

$\beta\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{0}}$

$\underline{\boldsymbol{b}} \neq \underline{\boldsymbol{0}}$, නිසා $\beta = 0$ බව ලැබේ.

$\alpha = 0$, නම් එවිට $\beta = 0$ වේ.

එසේම $\beta = 0$, නම් එවිට $\alpha = 0$ බව පෙන්විය හැකිය.

(ii) අවස්ථාව : $\alpha \neq 0$ යයි සිතමු

$\alpha\underline{\boldsymbol{a}} + \beta\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{0}}$

$\alpha\underline{\boldsymbol{a}} = -\beta\underline{\boldsymbol{b}}$

$\underline{\boldsymbol{a}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\underline{\boldsymbol{b}} \qquad (\alpha \neq \underline{\boldsymbol{0}})$

ඉහත සමීකරණය මඟින් $\underline{\boldsymbol{a}} \,//\, \underline{\boldsymbol{b}}$ බව ලැබේ.

මෙය පරස්පර විරෝධයකි.

එනයින් $\alpha \neq 0$ යැයි කල උපකල්පනය වැරදිය.

එමනිසා $\alpha = 0$ විය යුතුයි.

මේ ආකාරයටම $\beta = 0$ බව පෙන්විය හැක.

එම නිසා $\alpha\underline{\boldsymbol{a}} + \beta\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{0}}$ නම් හා නම් ම පමණක් $\alpha = 0, \beta = 0$ වේ.

උදාහරණ 5

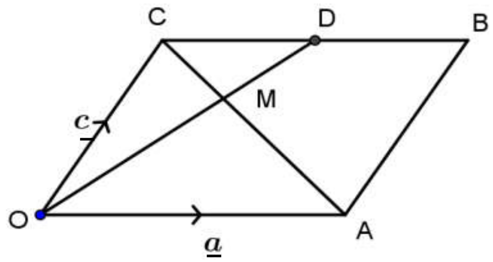
OABC සමාන්තරාස්‍රයකි. BCහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය D වේ. OD, හා AC රේඛා M හි දී ඡේදනය වේ. $\overrightarrow{OA} = \underline{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{\boldsymbol{c}}$ යයි දී ඇත.

(i) $\overrightarrow{OD}$ $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{c}}$ පදවලින් සොයන්න.

(ii) $OM : MD = \lambda : 1$ නම්, $\overrightarrow{OM}$ $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{c}}$ හා λ පදවලින් සොයන්න.

(iii) $AM : MC = \mu : 1$ නම්, $\overrightarrow{AM}$ $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{c}}$ හා μ පදවලින් සොයා එනයින් $\overrightarrow{OM}$ සොයන්න.

(iv) ඉහත (ii) හා (iii) න් ලබාගත් ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් λ හි හා μහි අගය සොයන්න.



(i) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OC} = \underline{c}\ ;\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \underline{a}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$= \boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ ....①

$OM : MD = \lambda : 1,\ \overrightarrow{OM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\ \overrightarrow{OD} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\left[\frac{1}{2}\underline{a}+\underline{c}\right]$ .... ②

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= \underline{c} - \underline{a}$

$AM : MC = \mu : 1,\ \overrightarrow{AM} = \frac{\mu}{\mu+1}\ \overrightarrow{AC} = \frac{\mu}{\mu+1}(\underline{c} - \underline{a})$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \underline{a} + \frac{\mu}{\mu+1}(\underline{c} - \underline{a})$

$= \left(1-\frac{\mu}{\mu+1}\right)\underline{a} + \frac{\mu}{\mu+1}\underline{c}$

$= \frac{1}{\mu+1}\underline{a} + \frac{\mu}{\mu+1}\underline{c}$ .... ③

② හා ③

$\underline{a}$, $\underline{c}$ ට සමාන්තර නොවන නිසා

$\frac{\lambda}{2(\lambda+1)} = \frac{1}{\mu+1}$ ....④

$\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{\mu}{\mu+1}$ ....⑤

$\frac{④}{⑤}$ න් $\frac{1}{2} = \frac{1}{\mu}$, $\mu = 2$

$\mu = 2$, නම් ④ $\frac{\lambda}{2(\lambda+1)} = \frac{1}{3}$

$\lambda = 2$

$\lambda = 2 = \mu$

එනම් $OM : MD = AM : MC = 2 : 1$

1.17 අභ්‍යාසය

1. ABCDEF සමාකාර ෂඩාස්‍රය $\overrightarrow{AB} = \underline{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{\boldsymbol{b}}$. $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ පදවලින් $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ සොයන්න.

2. ABCDEF සමාකාර ෂඩාස්‍රයක් හා O එහි කේන්ද්‍රය වේ. $\overrightarrow{OA} = \underline{\boldsymbol{a}}$, හා $\overrightarrow{OB} = \underline{\boldsymbol{b}}$ නම් $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ පදවලින් සොයන්න.

3. ABCD තල චතුරස්‍රයක් හා O චතුරස්‍රය පවතින තලයේ වූ ලක්ෂ්‍යයකි. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DO}+\overrightarrow{BO}$, නම් ABCD සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

4. ABC යනු BA = BC වන සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයකි. ACහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය D වේ. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$ බව පෙන්වන්න.

5. $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ එකිනෙකට ලම්බක දෛශික දෙකකි. දෛශික ආකලනය පිළිබඳ ත්‍රිකෝණය නීතිය භාවිතයෙන් $|\underline{\boldsymbol{a}}+\underline{\boldsymbol{b}}| = |\underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{b}}|$ බව පෙන්වන්න. $|\underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{b}}| = 5$ හා $|\underline{\boldsymbol{a}}| = 3$, විට $|\underline{\boldsymbol{b}}|$ සොයන්න.

6. $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ යනු $|\underline{\boldsymbol{a}}| = 6$, $|\underline{\boldsymbol{b}}| = 6$ වන දෛශික වේ. $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ අතර කෝණය 60° වේ. $|\underline{\boldsymbol{a}}+\underline{\boldsymbol{b}}|$ හා $|\underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{b}}|$ සොයන්න.

පහත (7,8,9) ප්‍රශ්න සාධනය කිරීමට දෛශික භාවිත කරන්න.

7. ABC ත්‍රිකෝණයකි. D හා E, AB හා ACහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. $DE = \frac{1}{2}BC$ හා DE , BC සමාන්තර බව සාධනය කරන්න.

8. ABCD චතුරස්‍රයකි. P, Q, R හා S පිළිවෙළින් AB, BC, CD හා DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

9. ABC ත්‍රිකෝණයකි. A, B හා C හි පිහිටුම් දෛශික $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$, $\underline{\boldsymbol{c}}$ වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

10. OABC සමාන්තරාස්‍රයකි. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ. OD හා AC රේඛා E හිදී ඡේදනය වේ.

$$\overrightarrow{OA} = \underline{\boldsymbol{a}},\ \overrightarrow{OB} = \underline{\boldsymbol{b}},\ OE : ED = \lambda : 1,\ CE : EA = \mu : 1.$$

   i. $\overrightarrow{OD}$ දෛශිකය $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ පදවලින් සොයන්න. එනයින් $\overrightarrow{OE}$ දෛශිකය λ, $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ පදවලින් ලියන්න.

   ii. $\overrightarrow{AC}$ දෛශිකය සොයා $\overrightarrow{OE}$ දෛශිකය μ, $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ පදවලින් ලියන්න.

iii. (i) හා (ii) ලබා ගත් ප්‍රතිඵල භාවිත කර ඉහත λ හා μ සොයන්න.

iv. OD හා CB දික් කළ විට H, දී හමුවේ නම් $\overrightarrow{OH}$ දෛශිකය සොයන්න.

11. OABC චතුරස්‍රය ගනිමු. OB හා AC හි මධ්‍ය ලක්‍ෂ්‍ය D හා E වේ. විකර්ණ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය F ලෙස ගනිමු. A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශිකය O ට අනුබද්ධව $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ හා $\underline{\boldsymbol{c}}$ ලෙස ගැනීමෙන් $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$ බව පෙන්වන්න.

P හා Q යනු OA හා BC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. P, F හා Q ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න. PF : FQ අනුපාතය සොයන්න.

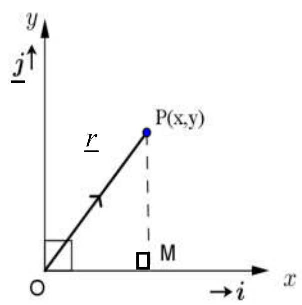
12. A හා B , O සමග ඒක රේඛීය නොවන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලෙස ගනිමු. A හා B පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් Oට අනුබද්ධ ව $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ නම් AB මත D ලක්ෂ්‍යය BD = 2DA වන පරිදි Dහි පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{3}(2\underline{\boldsymbol{a}}+\underline{\boldsymbol{b}})$ බව පෙන්වන්න.

$\overrightarrow{BC} = K\underline{\boldsymbol{a}}$ $(K > 1)$ O, D හා C ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛිය වේ. **k**හි අගය හා OD : DC අනුපාතය සොයන්න. $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ පදවලින් $\overrightarrow{AC}$ ප්‍රකාශ කරන්න.
තව ද ACට සමාන්තරව O හරහා යන රේඛාව Eහි දී AB හමු වේ නම් 6DE = AB බව පෙන්වන්න.

13. ABCD ත්‍රපීසියමක් වන අතර $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ තව ද $\overrightarrow{AB} = \underline{\boldsymbol{p}}$ සහ $\overrightarrow{AD} = \underline{\boldsymbol{q}}$ වේ. E ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ වන ලෙස වේ. AE සහ BD රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන F, $\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD}$ පරිදි වේ. මෙහි λ යනු නියතයකි. $(0 < \lambda < 1)$ $\overrightarrow{AF} = (1-\lambda)\underline{\boldsymbol{p}}+\lambda\underline{\boldsymbol{q}}$ බව පෙන්වන්න. එනයින් λහි අගය සොයන්න.

1.18 කාටිසියානු දෛශික අංකනය

කාටීසියානු තලය සලකන්න.
Ox දෙසට ඒකක දෛශිකය $\boldsymbol{i}$, ලෙස ද Oy දෙසට ඒකක දෛශිකය $\boldsymbol{j}$, හා P $\equiv(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ලෙස ගනිමු.



$\overrightarrow{OP} = \underline{\boldsymbol{r}}$ ලෙස ගනිමු.

$\underline{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP} = x\underline{\boldsymbol{i}} + y\underline{\boldsymbol{i}}$

$|\underline{\boldsymbol{r}}| = OP = \sqrt{x^2+y^2}$

$\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j}$ හා $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j}$ ලෙස ගනිමු.

$\underline{a}+\underline{b} = (a_1\underline{i}+b_1\underline{i})+(a_2\underline{j}+b_2\underline{j})$ බව හා

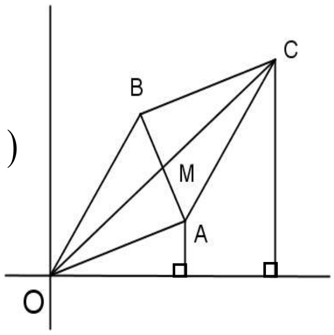
$\underline{a}-\underline{b} = (a_1-b_1)\underline{i}+(a_2-b_2)\underline{j}$ බව පෙන්වන්න.

සාධනය

$\overrightarrow{OA} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j}$ $\qquad$ $A \equiv (a_1, a_2)$

$\overrightarrow{OB} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j}$ $\qquad$ $B \equiv (b_1, b_2)$

OACB සමාන්තරාස්‍රය සම්පූර්ණ කරමු. එවිට $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underline{a} + \underline{b}$



ABහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය M නිසා $M \equiv \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$

OCහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය M නිසා $\qquad C \equiv \left(a_1 + b_1, a_2 + b_2\right)$

$$\overrightarrow{OC} = (a_1 + b_1)\underline{i} + (a_2 + b_2)\underline{j}$$

$\underline{a} = a_1 i + a_2 j$ හා $\underline{b} = b_1 i + b_2 \underline{j}$ නම් එවිට

$\underline{a} - \underline{b} = a + (-b) = (a_1\underline{i} + a_2\underline{j}) + (-b_1\underline{i} - b_2\underline{j})$

$$= (a_1 - b_1)\underline{i} + (a_2 - b_2)\underline{j}$$

උදාහරණ 6

$A \equiv (2, -1)$ හා $B \equiv (5, 3)$

i. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$ $\underline{i}, \underline{j}$ පදවලින් සොයන්න.

ii. $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ සොයන්න.

iii. $\overrightarrow{AB}$ දෙසට ඒකක දෛශිකය සොයන්න.

$A \equiv (2, -1)$, $B \equiv (5, 3)$

(i) $\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} - \underline{j}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OB} = 5\underline{i} + 3\underline{j}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5\underline{i} + 3\underline{j}) - (2\underline{i} - \underline{j})$

$= 3\underline{i} + 4\underline{j}$

(ii) $\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} - \underline{j}$, $\qquad$ $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{OB} = 5\underline{i} + 3\underline{j}$, $\qquad$ $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$\overrightarrow{AB} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$, $\qquad$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

(iii) $\overrightarrow{AB}$ දෙසට ඒකක දෛශිකය සොයන්න.

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{5}(3\underline{i} + 4\underline{j})$$

1.19 අභ්‍යාසය

1. $\underline{a} = \underline{i} - 2\underline{j}$ $\quad b = 4\underline{i}$ $\quad \underline{c} = 3\underline{i} - \underline{j}$ ලෙස ගනිමු.

   i. (a) $2\underline{a} + \underline{b}$ (b) $\underline{a} + 3\underline{c}$ (c) $2\underline{a} - \underline{b} - \underline{c}$

   ii. (a) $|2\underline{a}+\underline{b}|$ (b) $|\underline{a}+3\underline{c}|$ (c) $|2\underline{a}-\underline{b}-\underline{c}|$

   iii. $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ දෙසට ඒකක දෛශිකය සොයන්න.

2. $A \equiv (4, 3)$, $B \equiv (6, 6)$ හා $C \equiv (0, 1)$ යයි දී ඇත.

   (a) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ දෛශික ලියන්න.

   (b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ සොයන්න.

   (c) $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{BC}|, |\overrightarrow{CA}|$ සොයන්න.

3. O යනු මූලය හා $\overrightarrow{OA} = -\underline{i} + 5\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2\underline{i} + 4\underline{j}$ හා $\overrightarrow{OC} = 2\underline{j}$ වේ. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ සොයන්න. එනයින් ABC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව පෙන්වන්න.

4. $\overrightarrow{OA} = \underline{i} + 2\underline{i}$, $\overrightarrow{OB} = 3\underline{i} - \underline{j}$ හා $\overrightarrow{OC} = -\underline{i} + 5\underline{i}$. නම් $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{CA}$ සොයා එනයින් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න.

5. A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ වේ. මෙහි $\underline{a} = 2\underline{i} + 3\mathrm{j}$ සහ $\underline{b} = \underline{i} + 5\underline{j}$ වේ.

   (i) AB, හි මධ්‍ය ලක්‍ෂය R නම් R වල පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{i}, \underline{j}$ පදවලින් ලියන්න.

   (ii) $\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b}$ නම් $\underline{c}$ දෙසට ඒකක දෛශිකය $\underline{i}, \underline{j}$ පදවලින් සොයන්න.

6. (a) විශාලත්වය ඒකක 10වන $3\underline{i} - 4\underline{j}$ දිශාවට වූ දෛශිකය $a\underline{i} + b\underline{j}$, ලෙස ලියන්න.

   (b) $A \equiv (-2, -5)$ හා $B \equiv (3, 7)$

   (i) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ලියා එනයින් $\overrightarrow{AB}$ ලියන්න.

   (ii) විශාලත්වය ඒකක 65 වන $\overrightarrow{AB}$, දිශාවට වන දෛශිකය $a\underline{i} + b\underline{j}$ ආකාරයට සොයන්න.

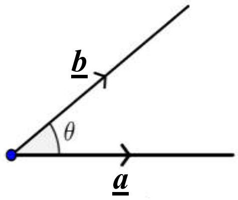
1.20 දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය

මීට පෙර අපි දෛශික එකතුව හා අන්තරය ඉගෙන ගතිමු. දෛශික ගුණිත දෙකක් අර්ථ දක්වා ඇත.

(i) දෛශික දෙකක් අතර අදිශ ගුණිතය

(ii) දෛශික දෙකක් අතර දෛශික ගුණිතය

අදිශ ගුණිතය තිත් ගුණිතය ලෙස හඳුන්වයි. තිත් ගුණිතයේ ප්‍රතිඵලය අදිශයකි. දෛශික ගුණිතයේ ප්‍රතිඵලය දෛශිකයකි.



අර්ථ දැක්වීම : **අදිශ ගුණිතය**

$\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඕනෑම අභිශුන්‍ය නොවන දෛශික දෙකක් යයි ගනිමු.
θ යනු දෛශික දෙක අතර කෝණය යි.
$\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දෛශික අතර අදිශ ගුණිතය $\underline{a} \bullet \underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}|\ \cos\theta$
$(0 \le \theta \le \pi)$ ලෙස අර්ථ දක්වමු.

අදිශ ගුණිතයේ ගුණිතය

1. $\underline{a} \bullet \underline{b} = \underline{b} \bullet \underline{a}$ (න්‍යාදේශ න්‍යාය)

   අර්ථ දැක්වීමෙන් $\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}|\ \cos\theta$

   $= |\underline{b}|\ |\underline{a}|\ \cos\theta$

   එනයින් $\underline{a} \bullet \underline{b} = \underline{b} \bullet \underline{a}$

2. $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අභිශුන්‍ය නොවන දෛශික දෙකක් නම් $\underline{a} \bullet \underline{b} = o$ වන්නේ $\underline{a}$, $\underline{b}$ ට ලම්බක වන්නේ නම් ම පමණි.

$$\underline{a} \bullet \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \quad |\underline{a}|\ |\underline{b}|\ \cos\theta = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = 0 \qquad (\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0})$$
$$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

3. $\underline{a} \bullet \underline{a} = |\underline{a}|\ |\underline{a}|\ \cos 0 = |\underline{a}|^2 \times 1 = a^2$ ලෙස ද ලියනු ලැබේ.

$$\underline{i} \bullet \underline{i} = |\underline{i}|\ |\underline{i}|\ \cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$\underline{j} \bullet \underline{j} = |\underline{j}|\ |\underline{j}|\ \cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$
$$\underline{i} \bullet \underline{j} = |\underline{i}|\ |\underline{j}|\ \cos\frac{\pi}{2} = 1 \times 1 \times 0 = 0$$

   එනම් $\underline{i} \bullet \underline{i} = \underline{j} \bullet \underline{j} = 1$ ද $\underline{i} \bullet \underline{j} = \underline{j} \bullet \underline{i} = 0$ වේ.

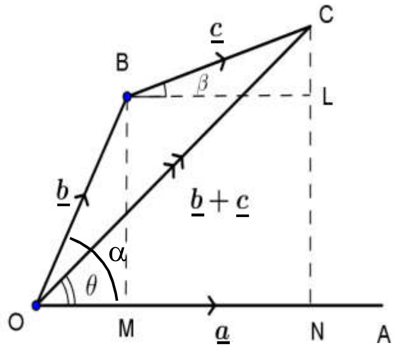
4. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ දෛශික වේ.

   $\underline{a} . (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c}$ (විසටන නීතිය)

   $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අතර කෝණය α වේ

   $\underline{a}$ හා $\underline{c}$ අතර කෝණය β වේ

   $\underline{a}$ හා $(\underline{b} + \underline{c})$ කෝණය θ වේ.



$$\underline{a} \bullet (\underline{b} + \underline{c}) = |\underline{a}| \bullet |\underline{b} + \underline{c}|\ \cos\theta$$
$$= (OA)\quad (OC) \cos\theta$$

$= \quad (OA) . (ON)$

$= \quad (OA)(OM + MN)$

$= \quad OA.OM + OA . MN$

$= \quad OA. OB \cos\alpha + OA. BC\cos\beta \qquad (MN = BL)$

$= \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= \quad \underline{a} \bullet \underline{b} + \underline{a} \bullet \underline{c}$

එම නිසා $\underline{a} . (\underline{b} + \underline{c}) \quad = \underline{a} \bullet \underline{b} + \underline{a} \bullet \underline{c}$

5. $\underline{\boldsymbol{a}} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j}$ ලෙස ගනිමු.

$\underline{\boldsymbol{a}} \bullet \underline{\boldsymbol{b}} \quad = \quad (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j}) \bullet (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j})$

$= \quad a_1 \underline{i} \bullet (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j}) + a_2 \underline{j} \bullet (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j})$

$= \quad a_1 \underline{i} \bullet b_1 \underline{i} + a_1 \underline{i} \bullet b_2 \underline{j} + a_2 \underline{j} \bullet b_1 \underline{i} + a_2 \underline{i} \bullet b_2 \underline{j}$

$= \quad a_1 b_1 + a_2 b_2$ ($\underline{i} \bullet \underline{i} = \underline{j} \bullet \underline{j} = 1$ හා $\underline{i} \bullet \underline{j} = \underline{j} \bullet \underline{i} = 0$ බැවින්)

උදාහරණ 7

$\underline{\boldsymbol{a}} = 2\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}$ නම් $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ අතර කෝණය සොයන්න.

$\underline{\boldsymbol{a}} . \underline{\boldsymbol{b}} \quad = |\underline{a}| \; |\underline{b}| \cos\theta$

$|\underline{a}| \quad = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \qquad |\underline{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

$\underline{\boldsymbol{a}} . \underline{\boldsymbol{b}} \quad = \sqrt{13} \times \sqrt{10} \cos\theta$ ——— (1)

$\underline{\boldsymbol{a}} . \underline{\boldsymbol{b}} \quad = (2\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}) . (\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}})$

$= 2\underline{\boldsymbol{i}} . (\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}) - 3\underline{\boldsymbol{j}} . (\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}})$

$= 2 + 0 - 0 + 9 = 11$ ——— (2)

(1) හා (2) $\quad \sqrt{130} \cos\theta = 11$

$$\cos\theta \quad = \frac{11}{\sqrt{130}}, \;\; \theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$$

උදාහරණ 8

i. $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}$ යනු $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a} + \underline{b}|$, වන පරිදි වූ දෛශික දෙකක් නම්

$\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ අතර කෝණය සොයන්න.

ii. $\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}$ දෛශිකය $\underline{\boldsymbol{a}}$ ට ලම්බක වේ නම් $|\underline{b}| = \sqrt{2}|\underline{\boldsymbol{a}}|$,

නම් ද $(2\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ ට ලම්බක බව පෙන්වන්න.

i. $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a}+\underline{b}|$

$|\underline{a}|^2 = |\underline{a}+\underline{b}|^2$

$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{a}} = (\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}) \cdot (\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$ (අර්ථ දැක්වීමෙන්)

$|\underline{a}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2\underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{b}}$

$-|\underline{b}|^2 = 2|\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos\theta$

$-|\underline{b}|^2 = 2|\underline{b}|\,|\underline{b}|\cos\theta$

$\cos\theta = -\frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{2\pi}{3}$

ii. $(\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}) \cdot \underline{\boldsymbol{a}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 0$

$|\underline{a}|^2 + \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 0$ .... ①

$(2\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}) \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 2\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{b}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$

$= 2\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} + |\underline{b}|^2$

$= -2|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2$

$= -2|\underline{a}|^2 + 2|\underline{a}|^2$ ($|\underline{b}| = \sqrt{2}|\underline{a}|$ නිසා)

$= 0$

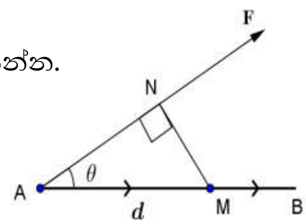
එනයින් $(2\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$, $\underline{\boldsymbol{b}}$. ට ලම්බක වේ.

උදාහරණ 9

නියත $\underline{\boldsymbol{F}}$ බලය ක්‍රියා කිරීම නිසා වස්තුවක් AB, දෙසට $\boldsymbol{d}$ විස්ථාපනයක් චලිත වේ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, θ කෝණයක් සාදයි නම් $\underline{\boldsymbol{F}}$ සමග බලය මඟින් සිදු කළ කාර්යය $\underline{\boldsymbol{F}} \cdot \underline{\boldsymbol{d}}$.

$\underline{\boldsymbol{F}} = 2\underline{\boldsymbol{i}} + 3\underline{\boldsymbol{j}}$ බලයේ යෙදුම් ලක්ෂ්‍යය $\underline{\boldsymbol{S}} = 5\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}$,

විස්ථාපනයක් සිදු කරයි නම් $\underline{\boldsymbol{F}}$. බලයෙන් සිදු කළ කාර්යය සොයන්න.

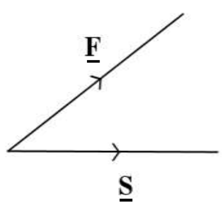


$\underline{\boldsymbol{F}}$ මඟින් කරන ලද කාර්යය

$= |\underline{F}|.\mathrm{AN}$

$= |\underline{F}|.\mathrm{AM}\cos\theta \qquad (\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \mathrm{d})$

$= \underline{\boldsymbol{F}} \cdot \underline{\boldsymbol{d}}$



කරන ලද කාර්යය $\underline{\boldsymbol{F}} \cdot \underline{\boldsymbol{S}}$

$= (2\underline{\boldsymbol{i}} + 3\underline{\boldsymbol{j}}) \cdot (5\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}})$

$= 2 \times 5 - 3 \times 3 = 10 - 9 = 1$ ජුල්

1.21 අභ්‍යාසය

1. $\underline{a} = 3\underline{i} + \underline{j}$ හා $\underline{b} = -\underline{i} + 2\underline{j}$, නම් $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ අතර කෝණය සොයන්න.

2. $\underline{a} = p\underline{i} + 3\underline{j}$ හා $\underline{b} = 2\underline{i} + 6\underline{j}$ දෛශික ලම්බක වේ නම්

   i. pහි අගය සොයන්න.

   ii. $|\underline{a}|$ හා $|3\underline{b} - \underline{a}|$ සොයන්න.

   iii. $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot (3\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}})$ සොයන්න.

   iv. $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $(3\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}})$ අතර කෝණය සොයන්න.

3. $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ දෛශික දෙක $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a} - \underline{b}|$ වන පරිදි වේ නම්

   $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ අතර කෝණය සොයන්න.

4. $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{b}| = 2$ හා $|\underline{a} - \underline{b}| = 4$,

   (i) $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$

   (ii) $|\underline{a} + \underline{b}|$ සොයන්න.

5. $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $(\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$ එකිනෙකට ලම්බක දෛශික නම්

   $|\underline{a} + \underline{b}|^2 = |\underline{b}|^2 - |\underline{a}|^2$ බව පෙන්වන්න.

6. තිත් ගුණිතය භාවිත කර රොම්බසයක විකර්ණ එකිනෙකට ලම්බක බව පෙන්වන්න.

7. $|\underline{a} + \underline{b}| = |\underline{a} - \underline{b}|$ නම් $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 0$ බව පෙන්වන්න. එනයින් සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ දිගින් සමාන නම් එය සෘජු කෝණාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

8. $\underline{a} = \underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j}$ මෙහි $\underline{\boldsymbol{i}}$ හා $\underline{\boldsymbol{j}}$ ට සුපුරුදු අර්ථ ඇත. $\underline{\boldsymbol{b}}$, විශාලත්වය $\sqrt{3}$ වන දෛශිකයකි. $\underline{\boldsymbol{a}}$ හා $\underline{\boldsymbol{b}}$ අතර කෝණය $\frac{\pi}{3}$ නම් $\underline{\boldsymbol{b}}$ දෛශික $\boldsymbol{x}\underline{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{y}\underline{\boldsymbol{j}}$ ආකාරයෙන් සොයන්න. මෙහි $\boldsymbol{x}$ (<0) හා $\boldsymbol{y}$ නියත නිර්ණය කළ යුතුය.

9. AB යනු වෘත්තයක විෂ්කම්භය නම් හා P යනු වෘත්තයේ පරිධිය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් නම් APB සෘජුකෝණයක් බව තිත් ගුණිතය භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.

10. තිත් ගුණිතය භාවිතයෙන් ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයෙන්

    $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ බව පෙන්වන්න.

2.0 අංශුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල පද්ධති

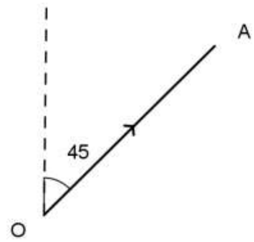
2.1 හැඳින්වීම

ස්ථිතිකය :

ස්ථිතිකය යාන්ත්‍රික විද්‍යාවේ එක් කොටසකි. එමඟින් බාහිර බල යටතේ සමතුලිතව ඇති වස්තු පිළිබඳ සොයා බලයි.

බලය :

නිශ්චල හෝ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් චලිත වන හෝ වස්තුවක චලිත ස්වභාවය වෙනස් කරයි නම් හෝ වෙනස් කිරීමට තැත් කරන බලපෑමක් බලය ලෙස අර්ථ දැක්විය හැකිය. බලයේ ඒකක නිව්ටන් වන අතර එය N මගින් දක්වනු ලැබේ.



අංශුවක් මත ක්‍රියා කරන බලයක් පිළිබඳ සඳහන් කරන විට විශේෂයෙන් පහත සඳහන් කරුණු දැක්විය යුතුය.

i. බලයේ විශාලත්වය

ii. බලය ක්‍රියා කරන දිශාව සහ

iii. බලය ක්‍රියා කරන ලක්ෂ්‍යය

බලයක් දිශානුගත රේඛා ඛණ්ඩයකින් නිරූපණය කළ හැකිය. O ලක්ෂ්‍යයේ දී 10 N බලයක් ඊසාන දිශාවට ක්‍රියා කරන්නේ යැයි සිතමු. එනම් එම බලය දිශානුගත OA රේඛා ඛණ්ඩයෙන් නිරූපණය කළ හැකිය. මෙහි OA දිගින් ඒකක 10ක් ද ඊතල හිසින් දිශාව ද නිරූපණය කෙරෙයි.

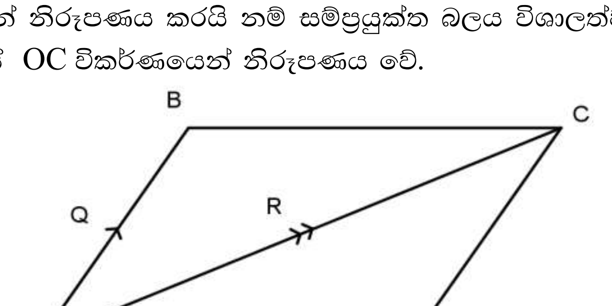
සම්ප්‍රයුක්ත බලය

යම් වස්තුවක් බල සමූහයක් යටතේ ක්‍රියා කරන විට එම ක්‍රියා සිදු කළ හැකි තනි බලයට එම බලවල සම්ප්‍රයුක්තය ලෙස කියනු ලැබේ.

2.2 බල සමාන්තරාස්‍ර නීතිය

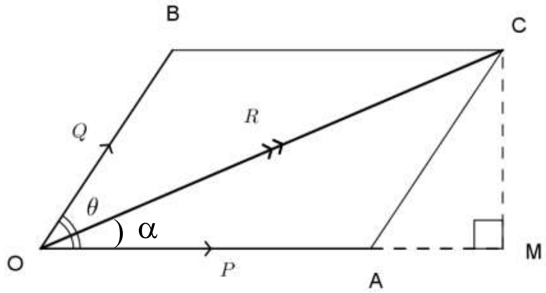
බල සමාන්තරාස්‍ර නීතිය ස්ථිතිකයේ මූලික සිද්ධාන්තයක් වන අතර එය පරීක්ෂණාත්මක ව තහවුරු කළ හැකිය.

අංශුවක් මත බල දෙකක් O හි දී ක්‍රියා කරන විට එම බල විශාලත්වය හා දිශාව අතින් OA සහ OB රේඛා මගින් නිරූපණය කරයි නම් සම්ප්‍රයුක්ත බලය විශාලත්වය හා දිශාව අතින් OACB සමාන්තරාස්‍රයේ OC විකර්ණයෙන් නිරූපණය වේ.

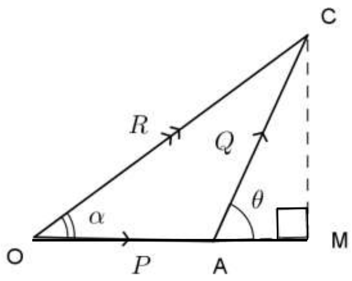


P සහ Q බල පිළිවෙළින් OACB සමාන්තරාස්‍රයේ OA සහ OB මගින් නිරූපණය කරන විට OC විකර්ණයෙන් P සහ Qහි සම්ප්‍රයුක්තය වන R නිරූපණය වේ.

පයිතගරස් ප්‍රමේයයෙන්



$$OC^2 = OM^2 + MC^2$$
$$= (OA + AM)^2 + MC^2$$
$$R^2 = (P + Q\cos\theta)^2 + (Q\sin\theta)^2$$
$$= P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2\cos^2\theta + Q^2\sin^2\theta$$
$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

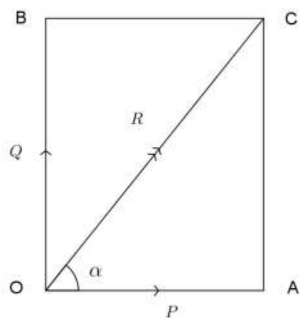


$$\tan\alpha = \frac{CM}{OM} = \frac{CM}{OA+AM}$$
$$= \frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta \\ \tan\alpha &= \frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta} \end{aligned}}$$

$\theta = 90°$, විට $\cos\theta = \cos 90 = 0;\quad \sin\theta = \sin 90 = 1$

$R^2 = P^2 + Q^2$, සහ $\tan\alpha = \dfrac{Q}{P}$ වේ.



$Q = P$ විට

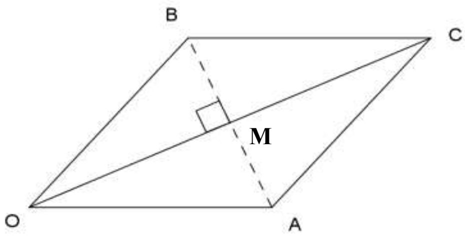
$$R^2 = P^2 + P^2 + 2P \times P \times \cos\theta$$
$$= 2P^2 + 2P^2\cos\theta = 2P^2(1 + \cos\theta)$$
$$= 2P^2 \times 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 4P^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$R = 2P.\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{P\sin\theta}{P+P\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

ක්‍රියා කරන බල දෙක සමාන නම් බල දෙකේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය බල දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.

වෙනත් ක්‍රමයක් (ජ්‍යාමිතිය මගින්)



$P = Q$; නම් $OA = OB$

සමාන්තරාස්‍රය රොම්බසයක් වේ. OACB

i. OC සහ AB ඡේදනය වන්නේ 90^0කිනි.

ii. $\angle AOC = \angle BOC \; (= \frac{\theta}{2})$

$$OC = 2OM = 2OA\cos\frac{\theta}{2}$$

$$R = 2P\cos\frac{\theta}{2}$$

උදාහරණය 1

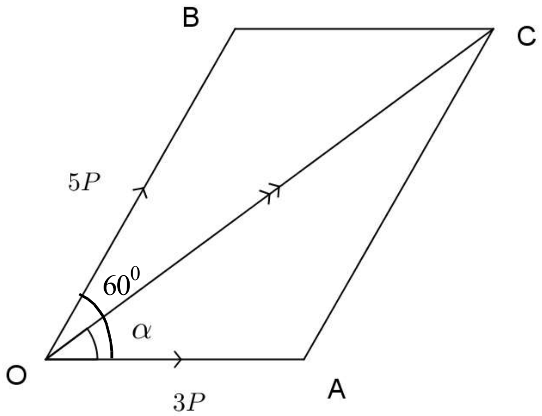
3P සහ 5P බල ලක්ෂ්‍යයක් මත ක්‍රියා කරන අතර බල දෙක අතර කෝණය $60°$කි. සම්ප්‍රයුක්ත බලය සොයන්න.

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

$$= (3P)^2 + (5P)^2 + 2 \times 3P \times 5P \,.\, \cos60°$$

$$= 9P^2 + 25P^2 + 15P^2 = 49P^2$$

$$R = 7P$$



$$\tan\alpha = \frac{5P\sin60°}{3P + 5P\cos60°}$$

$$\tan\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{11}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{11}\right)$$

උදාහරණය 2

ලක්ෂ්‍යයක් මත ක්‍රියා කාරන 8P සහ 5P බල දෙකක සම්ප්‍රයුක්තය 7P වේ. බල දෙක අතර කෝණය සොයන්න.

8P සහ 5P බල අතර කෝණය θ නම්

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

$$(7P)^2 = (8P)^2 + (5P)^2 + 2 \times 8P \times 5P\cos\theta$$

$$49P^2 = 64P^2 + 25P^2 + 80P^2\cos\theta$$

$$-40 = 80\cos\theta$$

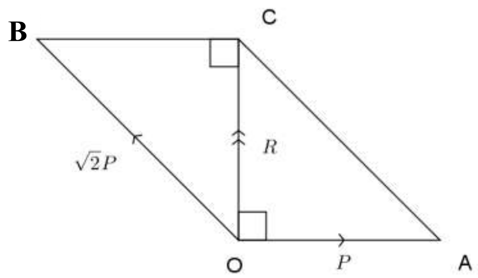
$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 120°$$

උදාහරණය 3

ලක්ෂ්‍යයක් මත ක්‍රියා කරන P සහ $\sqrt{2}P$, බල දෙකෙහි සම්ප්‍රයුක්ත බලය කුඩා බලය සමඟ 90^0 ක කෝණයක් සාදයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය ද බල දෙක අතර කෝණය ද සොයන්න.

පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්



$$OC^2 + CB^2 = OB^2$$

$$R^2 + P^2 = \left(\sqrt{2}P\right)^2$$

$$R^2 = P^2;\ R = P;$$

එම නිසා $OC = BC$ සහ $\angle BOC = 45°$

බල දෙක අතර කෝණය $90° + 45° = 135°$

2.3 බලයක් සංරචක දෙකකට විභේදනය කිරීම

a. බලයක් සෘජුකෝණීය සංරචක දෙකකට විභේදනය කිරීම

ලක්ෂ්‍යයක් මත ක්‍රියා කරන බල දෙකක් තනි බලයකට (සම්ප්‍රයුක්තය බලය) පත්කරන අකාරය බල සමාන්තරාස්‍ර ප්‍රමේයයෙන් ඉගෙන ගත්තෙමු. ප්‍රතිලෝම ලෙස තනි බලයක් බල දෙකකට විභේදනය කළ හැකි අතර එසේ කළ හැකි ආකාර අපරිමිත ප්‍රමාණයක් ඇත.

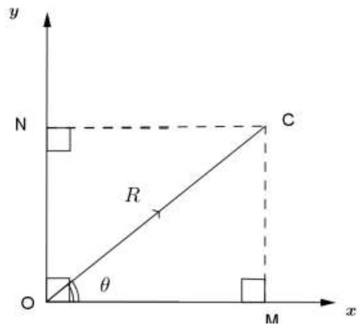
අංශුව මත ක්‍රියා කරන බලය R නම් එම බලය ලම්බක දිශා දෙකකට විභේදනය කළ හැකි ය.

OC මඟින් R බලය නිරූපණය කරයි නම්

R බලයේ Ox හා Oy ඔස්සේ විභේදනය කළ යුතු ය.

R බලය Ox දිශාව සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්

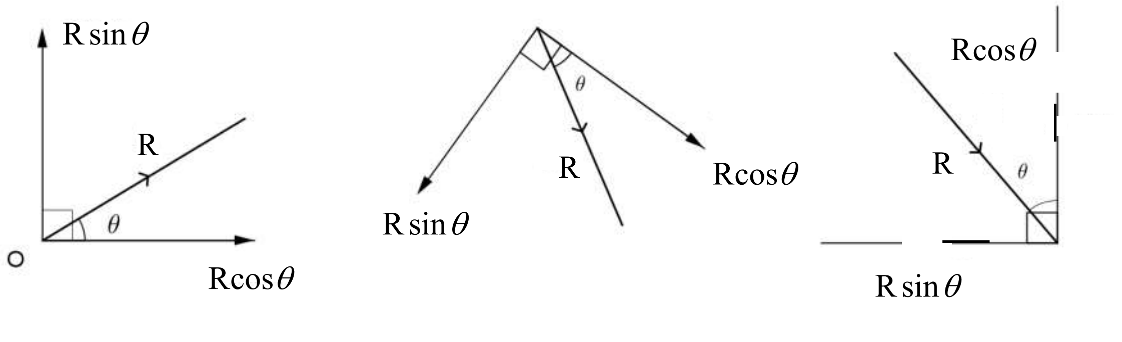
OMCN සෘජුකෝණාස්‍රයක් නිසා



$$\cos\theta = \frac{OM}{OC}, \quad OM = OC\cos\theta = R\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{MC}{OC}, \quad MC = OC\sin\theta = R\sin\theta = ON$$

එම නිසා R බලයේ Ox හා Oy ඔස්සේ විභේදන සංරචක පිළිවෙළින් $R\cos\theta$ සහ $R\sin\theta$ වේ.



b. ලම්බක නොවූ විභේදනය

R යනු දෙන ලද බලයක් නම්, එම R බලය දෙන ලද OA හා OB දිශා ඔස්සේ විභේදනය කරමු.

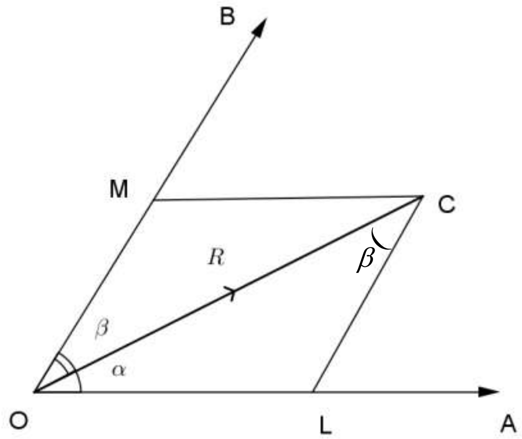
R බලය OC මගින් නිරූපණය වේ.

C හරහා CM හා CL රේඛාව OAට හා OB සමාන්තර ලෙස අඳින්න.

දැන් OLCM සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

එම නිසා OL හා OM මගින් R

බලයේ OA හා OB ඔස්සේ විභේදන සංරචක දැක්වේ.



$C\hat{O}A = \alpha$ නම් සහ $C\hat{O}B = \beta$ නම්

OLC ත්‍රිකෝණයට සයින් නියමය යෙදීමෙන්

$$\frac{OL}{\sin O\hat{C}L} = \frac{LC}{\sin C\hat{O}L} = \frac{OC}{\sin O\hat{L}C}$$

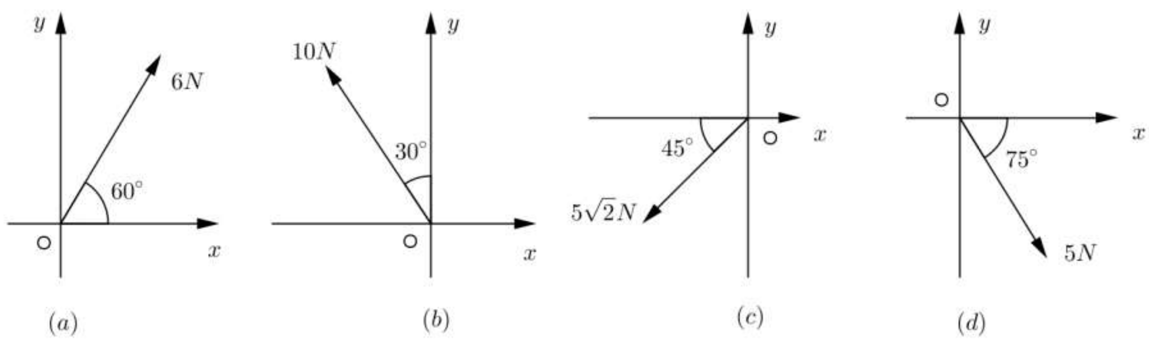
$$\frac{OL}{\sin\beta} = \frac{LC}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\left[180-(\alpha+\beta)\right]}$$

$$\frac{OL}{\sin\beta} = \frac{LC}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$OL = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad LC = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = OM$$

එනම් OA හා OB දිශා ඔස්සේ විභේදන සංරචක පිළිවෙළින් $\frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ වේ.

උදාහරණ 4



(a) $\rightarrow$ $X = 6\cos60^0 = 6 \times \frac{1}{2} = 3N$

$\uparrow$ $Y = 6\sin60 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,N$

(b) $\leftarrow$ X $=$ $10\sin 30, \quad = 10 \times \frac{1}{2} \quad = 5N$

$\uparrow$ Y $=$ $10\cos 30 \quad = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,N$

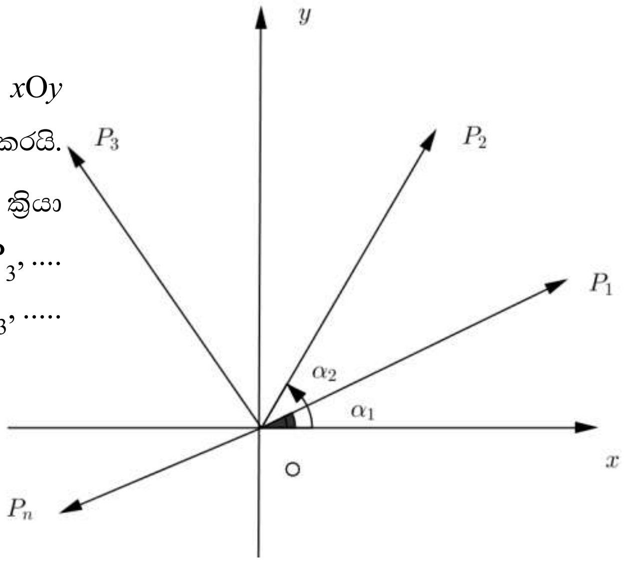
(c) $\leftarrow$ X $=$ $5\sqrt{2}\cos 45 = 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5N$

$\downarrow$ Y $=$ $5\sqrt{2}\sin 45 = 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5N$

(d) $\rightarrow$ X $=$ $5\cos 75 = 5\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)N$

$\downarrow$ Y $=$ $5\sin 75 = 5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)N$

2.4 ලක්ෂ්‍යයක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල පද්ධතියක සම්ප්‍රයුක්තය



Ox හා Oy යනු ලම්බක අක්ෂ දෙකක් නම් xOy තලයේ බල පද්ධතියක් O ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරයි. $P_1, P_2, P_3, ...\ P_n$ යනු O ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන ඒකතල බල පද්ධතියක් නම් $P_1, P_2, P_3, ...\ P_n$ බල Ox හා ධන දිශාව සමඟ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\ \alpha_n$ කෝණ සාදයි නම්

Ox ඔස්සේ විභේදනයෙන්

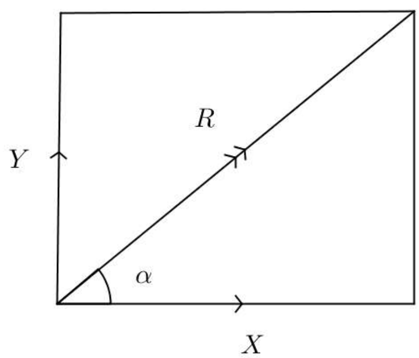
$\rightarrow$ X $=$ $P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + ... + P_n\cos\alpha_n$

$\uparrow$ Y $=$ $P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + ... + P_n\sin\alpha_n$

R යනු සම්ප්‍රයුක්ත බලය නම්

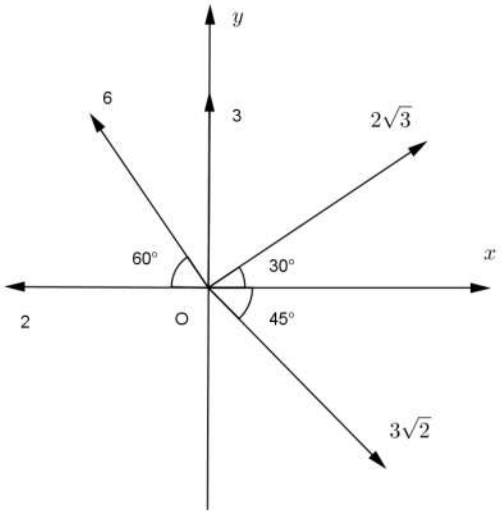
R $=$ $\sqrt{X^2 + Y^2}$

$\tan\alpha$ $=$ $\frac{Y}{X}$

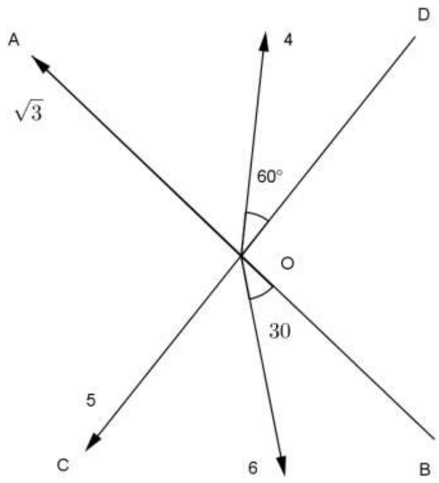


උදාහරණ 5

පහත දැක්වෙන බල පද්ධති (කුලකයක්) O ලක්ෂ්‍යය මත ක්‍රියා කරයි නම් එම බලවල සම්ප්‍රයුක්ත



(a)



(b)

Ox හා Oy එකිනෙකට ලම්බක සහ AB හා CD එකිනෙකට ලම්බක වේ.

(a) Ox ඔස්සේ විභේදනය කිරීමෙන්

$$X = 2\sqrt{3}\cos 30 - 6\cos 60 - 2 + 3\sqrt{2}\cos 45$$

$$= 3 - 3 - 2 + 3 = 1$$

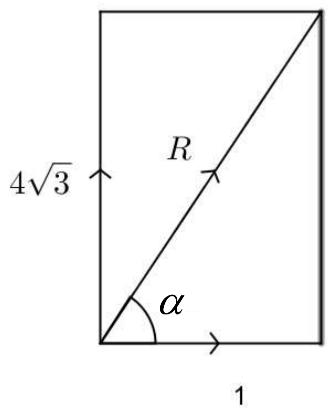
Oy ඔස්සේ විභේදනය කිරීමෙන්

$$Y = 3 + 2\sqrt{3}\sin 30 + 6\sin 60 - 3\sqrt{2}\sin 45$$

$$= 3 + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = 4\sqrt{3}$$

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 49$$

$$R = 7, \tan\alpha = 4\sqrt{3}$$



(b) BA ඔස්සේ විභේදනය කිරීමෙන්

$$X = \sqrt{3} + 4\sin 60 - 6\cos 30$$

$$= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$$

DC ඔස්සේ විභේදනය කිරීමෙන්

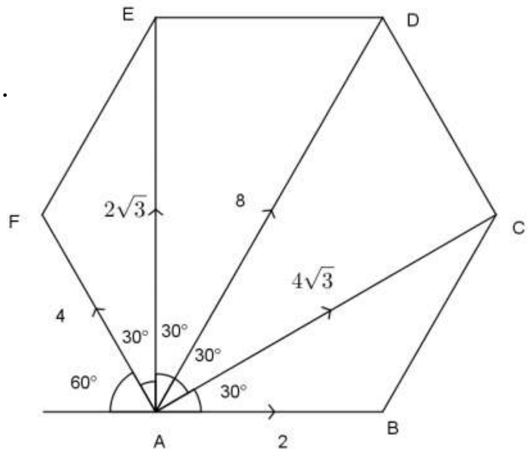
$$Y = 5 - 4\cos 60 + 6\sin 30$$

$$= 5 - 2 + 3 = 6$$

එම නිසා 6N සම්ප්‍රයුක්ත බලය DC ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

උදාහරණ 6

ABCDEF යනු සවිධි ෂඩස්‍රයකි. විශාලත්වයෙන් 2, $4\sqrt{3}$, 8, $2\sqrt{3}$ සහ 4 නිව්ටන් වන බල A ලක්ෂ්‍යයේ දී පිළිවෙළින් AB, AC, AD, AE සහ AF දිශා ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලය සොයන්න.



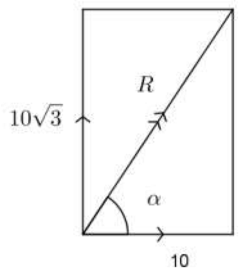
$B\hat{A}E = 90°$

AB සහ AE පිළිවෙළින් x හා y අක්ෂය ලෙස ගනිමු.

AB ඔස්සේ විභේදනයෙන්

$$X = 2 + 4\sqrt{3}\cos 30 + 8\cos 60 - 4\cos 60$$
$$= 2 + 6 + 4 - 2 = 10$$

$$Y = 4\sqrt{3}\sin 30 + 8\sin 60 + 2\sqrt{3} + 4\sin 60$$
$$= 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

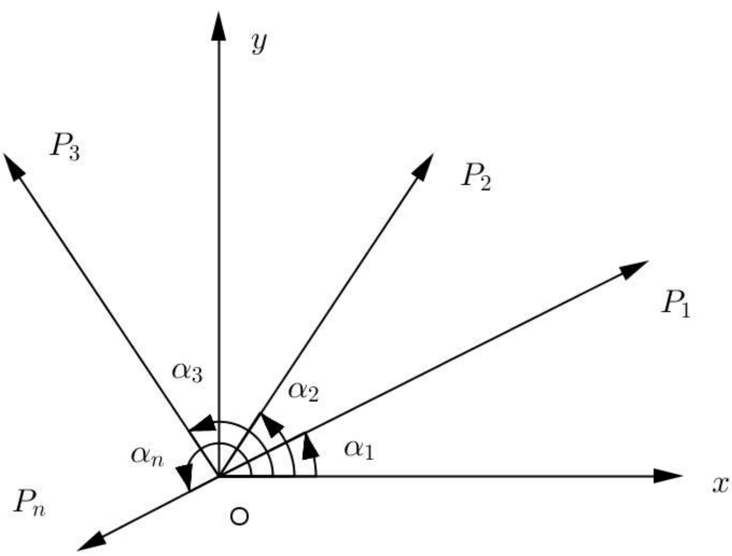


$$R^2 = X^2 + Y^2 = 10^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2$$
$$= 400$$
$$R = 20N$$

$$\tan\alpha = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}; \qquad \alpha = 60°$$

එම නිසා සම්ප්‍රයුක්ත බලය 20N වන අතර එය AD ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

2.5 ලක්ෂ්‍යයක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල පද්ධතියක සමතුලිතතාව



P_1, P_2, P_3 ..... P_n යන ඒකතල බල පද්ධතියක් O ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරයි නම් Ox හා Oy යනු එකිනෙකට ලම්බක අක්ෂ දෙකක් නම් ද $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ බල Ox අක්ෂයේ ධන දිශාව සමඟ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$ කෝණ සාදයි නම්

Ox ඔස්සේ බල විභේදනය කිරීමෙන්

$$\rightarrow X = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots\ldots + P_n\cos\alpha_n$$
$$\uparrow Y = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots\ldots + P_n\sin\alpha_n$$
$$R = X^2 + Y^2$$

අංශුව සමතුලිත නම් සම්ප්‍රයුක්ත බලය R = O වේ.

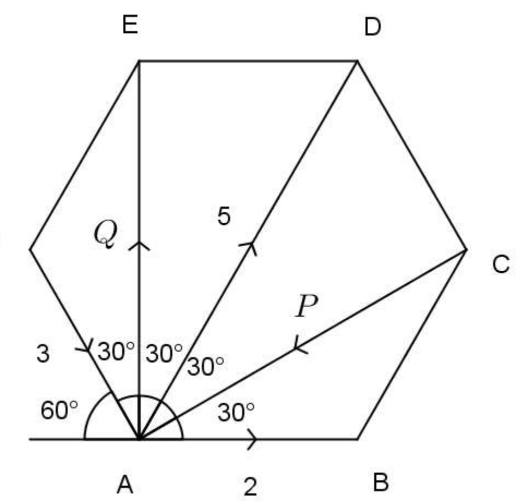
$$R = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0, \qquad Y = 0 \qquad (X^2 \geq 0, Y^2 \geq 0 \text{ නිසා })$$

* අනිවාර්ය අවශ්‍යතාව නම් අංශුව මත ක්‍රියාකරන බල එකිනෙකට සමාන්තර නොවන දිශා දෙකක් ඔස්සේ විභේදන කොටස්වල එකතුව ශුන්‍ය විය යුතු වීම යි.

උදාහරණ 7

ABCDEF යනු සවිධි ෂඩස්‍රයකි. විශාලත්වය 2, P, 5, Q හා 3 වන බල පිළිවෙළින් AB, CA, AD, AE සහ FA ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. බල පද්ධතිය සමතුලිත නම් P හා Q බල සොයන්න.

AB ඔස්සේ විභේදනයෙන්



$$X = 2 - P\cos30 + 5\cos60 + 3\cos60$$
$$= 2 - \frac{\sqrt{3}P}{2} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$$
$$= 6 - \frac{\sqrt{3}P}{2}$$
$$Y = Q - P\sin30 + 5\sin60 - 3\sin60$$
$$= Q - \frac{P}{2} + \sqrt{3}$$

බල පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ ඇත්නම්

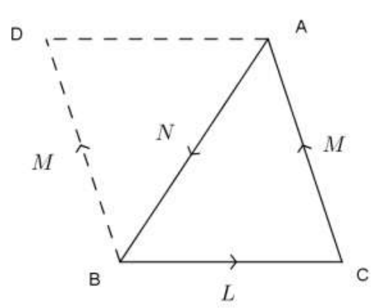
$$X = 0, \qquad Y = 0$$
$$X = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 - \frac{P\sqrt{3}}{2} = 0; \quad P = \frac{12}{\sqrt{3}} \quad = 4\sqrt{3}\,\text{N}$$
$$Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q - \frac{P}{2} + \sqrt{3} = 0$$
$$Q - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$
$$Q = \sqrt{3}\text{N}$$

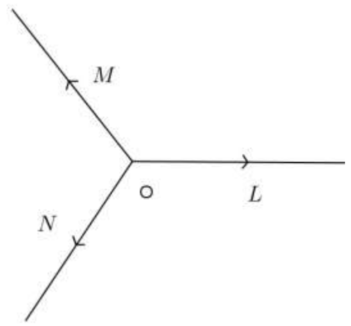
2.6 අංශුවක් මත ඒකතල බල තුනක් ක්‍රියා කරන අවස්ථාව

1. බල ත්‍රිකෝණය

අංශුවක් මත බල තුනක් ක්‍රියා කරයි නම් හා එම බල විශාලත්වය හා දිශාව අතින් ත්‍රිකෝණයක අනුපිළිවෙළින් ගත් පාද මඟින් නිරූපණය කළ හැකි නම් අංශුව සමතුලිත වේ.

L, M, N යනු O ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන බල තුනක් නම් හා ඒවා පිළිවෙළින් BC, CA, AB (විශාලත්වය හා දිශාව) අතින් ABC ත්‍රිකෝණයක නිරූපණය කළ හැකි නම් L, M, N බල සමතුලිත වේ.





BCAD සමාන්තරාස්‍රය සම්පූර්ණ කිරීමෙන්

BD = CA, BD || CA

BD රේඛාව මඟින් M බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව නිරූපණය වේ.

බල සමාන්තරාස්‍ර ප්‍රමේයයෙන් M හා Lහි සම්ප්‍රයුක්තය $\overrightarrow{BA}$ මඟින් නිරූපණය කරයි.

එනම් ; BA = N සහ එහි දිශාව Nට ප්‍රතිවිරුද්ධ වේ.
R = N නම් සහ දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ ව O හි දී ක්‍රියා කරයි
L, M, N බල සමතුලිත වේ.
නැතිනම්,

දෛශික භාවිතයෙන් $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$

$$\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB} = \underline{\boldsymbol{0}}$$

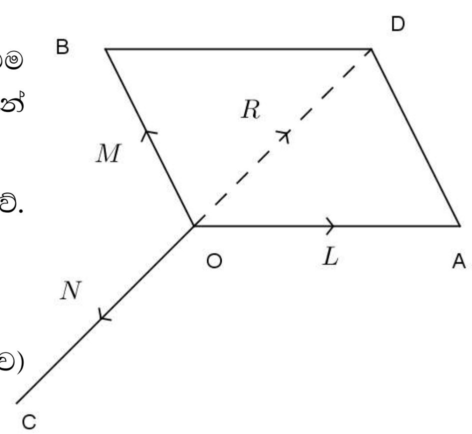
බල තුනෙහි දෛශික එකතුව ශුන්‍ය වේ. එම නිසා ලක්ෂ්‍ය මත ක්‍රියා කරන බල තුන සමතුලිත වේ.

2. බල ත්‍රිකෝණ නියමයේ විලෝමය

අංශුවක් බල තුනක ක්‍රියාව යටතේ සමතුලිත වේ නම් එම බල විශාලත්වයෙන් හා දිශාවෙන් ත්‍රිකෝණයක අනුපිළිවෙළින් ගත් පාද මඟින් නිරූපණය කළ හැකි ය.

L, M සහ N යනු අංශුවක් මත ක්‍රියා කරන බල තුනක් වේ. ඒවා සමතුලිත වේ.

L, M, N බල O ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරයි නම් හා ඒවා පිළිවෙළින් OA, OB, OC ඔස්සේ (විශාලත්වය හා දිශාව) නිරූපණය කරමු.

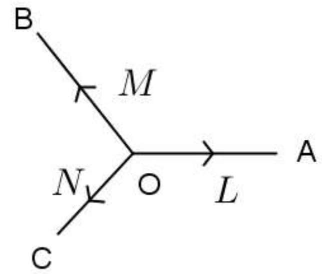


OADB සමාන්තරාස්‍රය නිර්මාණය කරමු. එවිට බල සමාන්තරාස්‍ර ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් Lහි හා Mහි සම්ප්‍රයුක්ත බලය R, OD ඔස්සේ නිරූපණය කරයි. L, M සහ N බල සමතුලිත නම් R හා N සමතුලිත වේ.
එනම් R = N නම් සහ ඒවා දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ වේ.
OAD ත්‍රිකෝණයේ , L බලය OA මඟින් ද M බලය AD මඟින් ද N බලය DO මඟින් ද නිරූපණය වේ.

3. ලාමිගේ ප්‍රමේයය

අංශුවක් බල තුනක් යටතේ සමතුලිත ව ඇත්නම් එක් එක් බලය අනෙක් බල දෙක අතර කෝණයේ සයින් අගයට සමානුපාතික වේ.

L, M, N බල සමතුලිත නම්

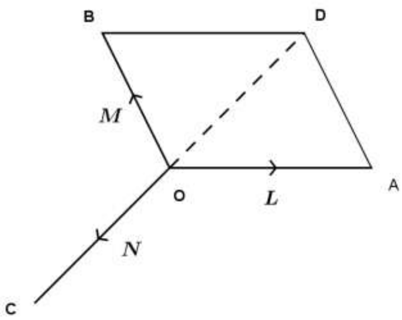


$$\frac{L}{\sin\ B\hat{O}C} = \frac{M}{\sin\ C\hat{O}A} = \frac{N}{\sin\ A\hat{O}B}$$

මෙම ප්‍රමේයය පහසුවෙන් සාධනය කළ හැකිය.
ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නියමය භාවිතයෙන්
L, M, N බල ත්‍රිකෝණය AOD ත්‍රිකෝණයේ පාද මඟින් නිරූපණය කළ හැකිය. AOD ත්‍රිකෝණයේ

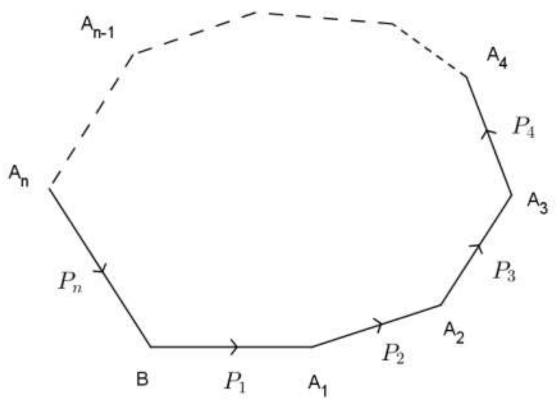
$$\frac{OA}{\sin O\hat{D}A} = \frac{AD}{\sin D\hat{O}A} = \frac{DO}{\sin O\hat{A}D}$$

$$\frac{L}{\sin B\hat{O}C} = \frac{M}{\sin C\hat{O}A} = \frac{N}{\sin A\hat{O}B}$$



4. බල බහුඅස්‍රය

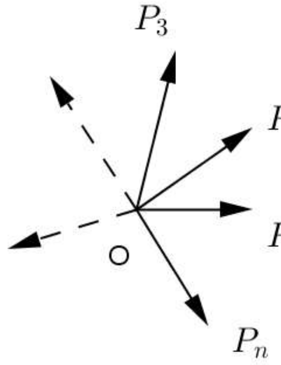
අංශුවක් මත බල සමූහයක් ක්‍රියා කරන්නේ නම් හා එම බල විශාලත්වය හා දිශාව අතින් බහුඅස්‍රයක අනුපිළිවෙළින් ගත් පාද මඟින් නිරූපණය කළ හැකි නම් එම බල සමූහය යටතේ එම අංශුව සමතුලිත වේ.



$P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ බල අංශුවක් මත ක්‍රියා කරයි නම් හා එම බල $BA_1A_2A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots A_n$ බහුඅස්‍රයේ පිලිවෙළින්.

$BA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots. A_{n-1}A_n, A_nB$

පාද මඟින් දැක්විය හැකි නම් එවිට බල සමතුලිතව පවතී.



$$\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{BA_2}$$

$$\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{BA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{BA_3}$$

දෛශික ආකලනය මඟින්

$$\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots. + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nB} = 0$$

ආතතිය

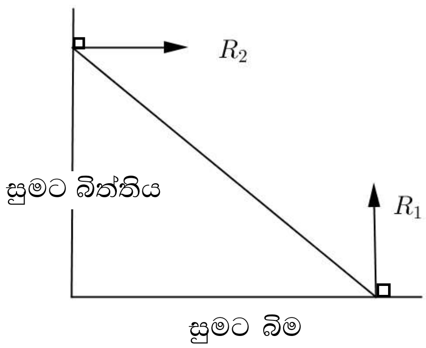
තන්තුවක බර දෙන ලද ගැටළුවේ අනෙකුත් බර හා සසඳන විට නොසැලකිය හැකි තරම් කුඩා නම් එම තන්තුව ලුහු තන්තුවක් ලෙස හැඳින්වේ. තන්තුවක් මඟින් වස්තුව මත යොදන බලය ආතතිය ලෙස හඳුන්වන අතර එය තන්තුව දිගේ ක්‍රියා කරයි.

ආතතිය

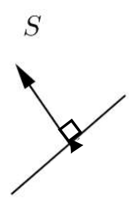
සැහැල්ලු තන්තුවක ආතතිය ආසන්න ලෙස තන්තුව දිගේ ඒකාකාර වේ. තන්තුව බර නම් තන්තුවේ ආතතිය තන්තුව දිගේ ලක්ෂ්‍යයෙන් ලක්ෂ්‍යයට වෙනස් වේ.

සුමට පෘෂ්ඨය

වස්තු එකිනෙක ස්පර්ශ වී ඇති විට එම වස්තු මත ක්‍රියා කරන එකම බලය වන්නේ අභිලම්භ ස්පර්ශක ප්‍රතික්‍රියාව නම් එම අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව ඔවුන්ගේ පොදු ස්පර්ශක තලයට ලම්බක වේ නම් සුමට වස්තු දෙකක් ගැටී ඇති විට අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව අංශුව චලනය වීමට ප්‍රයත්න දරන දිශාවට ලම්බ වේ.



දණ්ඩ හා සුමට බිම අතර ප්‍රතික්‍රියාව R_1 නම් එය සුමට බිමට ලම්බක වෙයි. දණ්ඩ හා සුමට බිත්තිය අතර ප්‍රතික්‍රියාව R_2 නම් එය බිත්තියට ලම්බක වේ. මෙහි R_1, R_2 අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියා වේ.



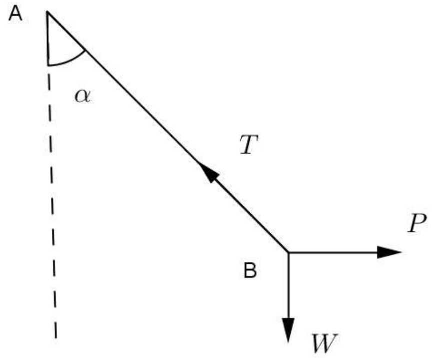
දණ්ඩක් සුමට නා දැත්තක් හා ගැටී සමතුලිත වන විට ප්‍රතික්‍රියාව S දණ්ඩට ලම්බ වේ.

2.7 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණය 8

බර W වන අංශුවක් AB ලුහු තන්තුවක B කෙළවරට ගැට ගසා අනෙක් කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවි කර ඇත. අංශුව මත P තිරස් බලයක් B හි දී යෙදූ විට තන්තුව සිරසට α කෝණයක් සාදමින් සමතුලිතතාවයේ ඇත්නම් තන්තුවේ ආතතිය ද Pහි අගය ද W හා α ඇසුරෙන් සොයන්න.

ක්‍රමය (I)



අංශු මත ක්‍රියා කරන බල

i. බලය W (සිරස් ව පහළට)
ii. බලය P (තිරස් ව)
iii. තන්තුවේ ආතතිය T (තන්තුව ඔස්සේ)

අංශුවේ සමතුලිතතාවය සඳහා

බල සිරස් ව විභේදනයෙන්

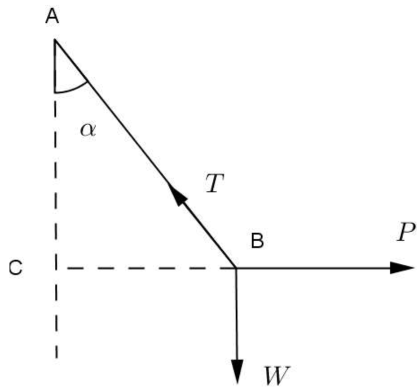
$$\uparrow \quad T\cos\alpha - W = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{W}{\cos\alpha}$$

බල තිරස්ව විභේදනයෙන්

$$\rightarrow \quad P - T\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad P = T\sin\alpha = W\tan\alpha$$

ක්‍රමය II (බල ත්‍රිකෝණ ප්‍රමේයයෙන්)

T, W, P බල තුන අංශුව මත ක්‍රියා කරයි නම් හා අංශුව සමතුලිතතාවේ ඇත්නම් BAC ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන්



BA මඟින් තන්තුවේ ආතතිය T නිරූපණය කළ හැකිය.

AC මඟින් බර W නිරූපණය කරයි

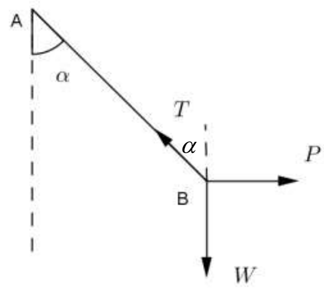
CB මඟින් P බලය නිරූපණය කරයි

$$\frac{T}{BA} = \frac{W}{AC} = \frac{P}{CB}$$

$$\frac{T}{BA} = \frac{W}{AC}; \quad T = W\times\frac{BA}{AC} = \frac{W}{\cos\alpha}$$

$$\frac{W}{AC} = \frac{P}{CB}, \quad P = W\times\frac{CB}{AC} = W\tan\alpha$$

ක්‍රමය III (ලාමිගේ ප්‍රමේයයෙන්)



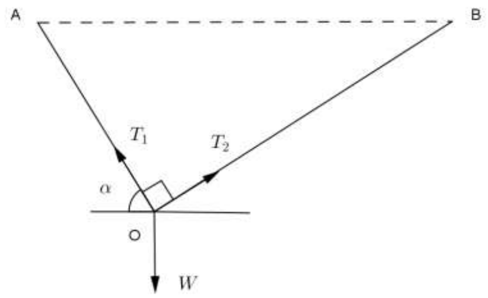
$$\frac{T}{\sin 90} = \frac{W}{\sin(90+\alpha)} = \frac{P}{\sin(180-\alpha)}$$

$$\frac{T}{1} = \frac{W}{\cos\alpha} = \frac{P}{\sin\alpha}$$

$$T = \frac{W}{\cos\alpha}, \qquad P = W\tan\alpha$$

උදාහරණය 9

බර W වන අංශුවක් ලුහු OA හා OB තන්තු දෙකක O කෙලවරවලට සම්බන්ධ කර ඇත. එම තන්තුවල දිග පිළිවෙළින් 50 cm, 120 cm වේ. තන්තුවල අනෙකුත් A හා B අග්‍ර එකම තිරස් මට්ටමේ ඇති ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සම්බන්ධ කර ඇත්තේ A හා B අතර පරතරය 130 cm වන පරිදි ය. තන්තුවල ආතතිය සොයන්න.



$$OA^2 + OB^2 = 50^2 + 120^2 = 130^2 = AB^2$$

එම නිසා $\angle AOB = 90°$

$O\hat{A}B = \alpha$ නම් $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

O ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන බල

i. W බර (සිරස් ව පහළට)

ii. ආතතිය T_1 (OA තන්තුව දිගේ)

iii. ආතතිය T_2 (OB තන්තුව දිගේ)

ක්‍රමය I

අංශුවේ සමතුලිතතාව සඳහා

බල තිරස් ව විභේදනයෙන්

$\longrightarrow$ $T_2\cos(90 - \alpha) - T_1\cos\alpha = 0$

$T_2\sin\alpha - T_1\cos\alpha = 0$

$12T_2 - 5T_1 = 0$ ....①

බල සිරස් ව විභේදනයෙන්

$\uparrow$ $T_2\sin(90 - \alpha) + T_1\sin\alpha - W = 0$

$T_2\cos\alpha + T_1\sin\alpha - W = 0$

$5T_2 + 12T_1 = 13W$ ....②

(1) හා (2) න් $T_1 = \frac{12W}{13}$ සහ $T_2 = \frac{5W}{13}$

ක්‍රමය II (බල ත්‍රිකෝණයෙන්)

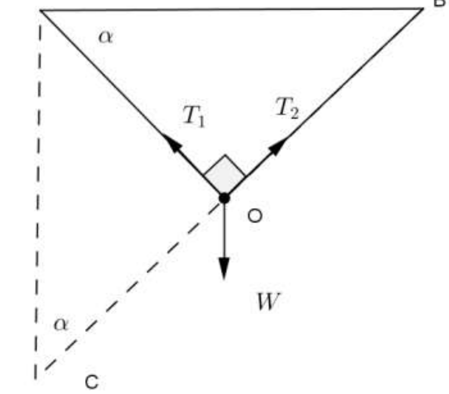
AC සිරස් වේ. BO, C තෙක් දික් කර ඇත.

OAC ත්‍රිකෝණයෙන් සැලකීමෙන්

$T_1 \longrightarrow OA$

$W \longrightarrow AC$

$T_2 \longrightarrow CO$



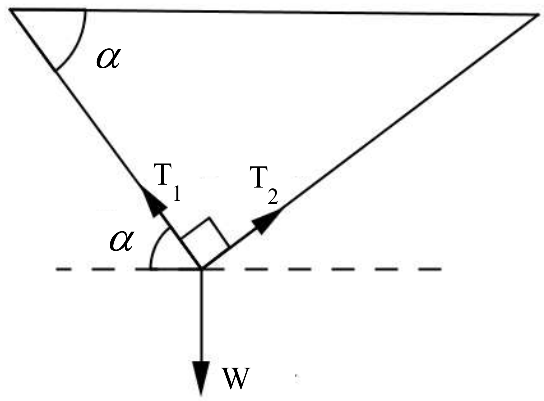
බල ත්‍රිකෝණ නියමයෙන්

$$\frac{T_1}{OA} = \frac{W}{AC} = \frac{T_2}{CO}$$

$$T_1 = W.\frac{OA}{AC} = W\sin\alpha = \frac{12W}{13}$$

$$T_2 = W.\frac{OC}{AC} = W\cos\alpha = \frac{5W}{13}$$

ක්‍රමය III (ලාමිගේ ප්‍රමේයය)



$$\frac{W}{\sin 90} = \frac{T_1}{\sin(180-\alpha)} = \frac{T_2}{\sin(90+\alpha)}$$

$$\frac{W}{1} = \frac{T_1}{\sin\alpha} = \frac{T_2}{\cos\alpha}$$

$$T_1 = W\sin\alpha = \frac{12W}{13}$$

$$T_2 = W\cos\alpha = \frac{5W}{13}$$

උදාහරණය 10

බර W වන අංශුවක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත සුමට තලයක තබා ඇත.

i. ආනත තලය ඔස්සේ අංශුවට යෙදූ බලයක් මඟින්

ii. තිරස් ව අංශුවට යෙදූ බලයක් මඟින්

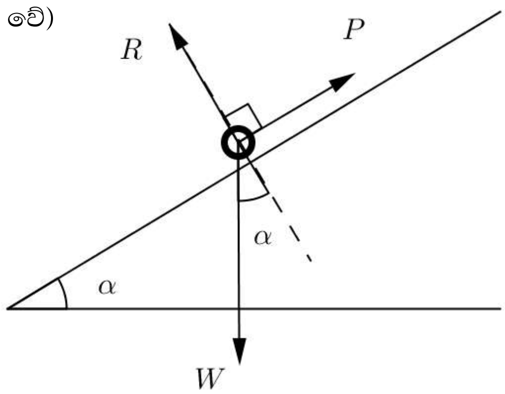
අංශුව සමතුලිතව පවතින විට එම බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.

i. අංශුව මත ක්‍රියා කරන බල

a) බර W (සිරස් ව පහළට)

b) අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව R (තලයට ලම්බක වේ)

c) P බලය (තලය ඔස්සේ)



ක්‍රමය I

අංශුවේ සමතුලිතතාව සඳහා

ආනත තලය ඔස්සේ බල විභේදනයෙන්

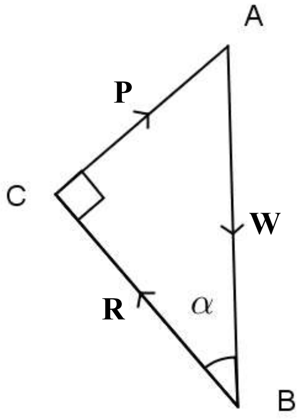
$\nearrow_{\alpha}$ $P - W\sin\alpha = 0; \quad P = W\sin\alpha$

ආනත තලයට ලම්බකව බල විභේදනයෙන්

$$R - W\cos\alpha = 0$$
$$R = W\cos\alpha$$

ක්‍රමය II (බල ත්‍රිකෝණයෙන්)

ABC ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන්



$W \longrightarrow AB$

$R \longrightarrow BC$

$P \longrightarrow CA$

$$\frac{W}{AB} = \frac{R}{BC} = \frac{P}{CA}$$

$$R = W.\frac{BC}{AB} = W\cos\alpha$$

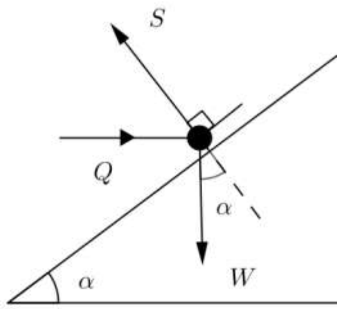
$$P = W.\frac{CA}{AB} = W\sin\alpha$$

(ii). අංශුව මත ක්‍රියා කරන බල

a) බර W (සිරස් ව පහළට)

b) අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව S (තලයට ලම්බක වේ)

c) තිරස් බලය Q



ක්‍රමය I

අංශුවේ සමතුලිතතාවය සලකා,

තලයට සමාන්තර ව බල විභේදනය කිරීමෙන්,

$$Q\cos\alpha - W\sin\alpha = 0$$

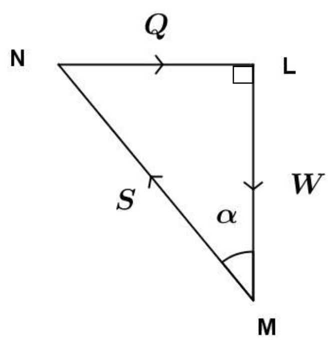
බල සිරසට විභේදනයෙන්

$$\uparrow S\cos\alpha - W = O$$

$$S = \frac{W}{\mathrm{Cos}\,\alpha}$$

ක්‍රමය II (බල ත්‍රිකෝණය)

LMN ත්‍රිකෝණය සලකා බලමු



i) බර W $\longrightarrow$ LM

ii) අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව S $\longrightarrow$ MN

iii) තිරස් බලය Q $\longrightarrow$ NL

බල ත්‍රිකෝණ නියමයෙන්

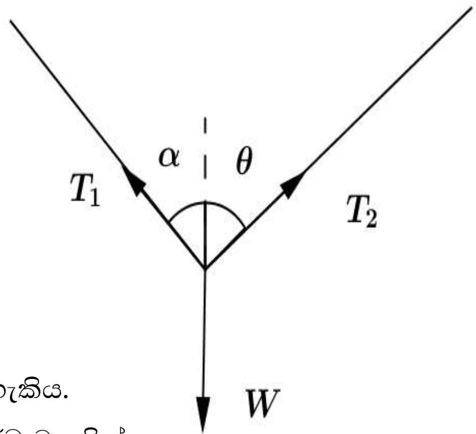
$$\frac{W}{LM} = \frac{S}{MN} = \frac{Q}{NL}$$

$$Q = W\frac{NL}{LM} \quad = \quad W\tan\alpha$$

$$S = W\frac{MN}{LM} \quad = \quad \frac{W}{\cos\alpha} \quad = \quad W\sec\alpha$$

උදාහරණය II

බර W වන අංශුවක් තන්තු දෙකක් මගින් එල්ලා ඇත. එක් තන්තුවක් සිරස සමඟ $\alpha \ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ කෝණයක් සාදයි. අනෙක් තන්තුවේ ආතතිය අඩුතම වන පරිදි එම තන්තුව සිරස සමඟ සාධන කෝණය සොයන්න. මෙම අවස්ථාවේ දී තන්තු දෙකේ ආතති සොයන්න.



අංශුව මත ක්‍රියා කරන බල

i) අංශුවේ බර W (සිරස් ව පහළට)

ii) ආතතිය T_1 (සිරසට α කෝණයකින් ආනත)

iii) ආතතිය T_2 (අනෙක් තන්තුවේ අතතිය අවම විය යුතු යි)

අංශුවේ සමතුලිතතාව ය සඳහා බල තුනක් ක්‍රියාත්මක වී ඇත.

මෙම ගැටලුව පහසුවෙන් බල ත්‍රිකෝණයෙන් විසඳිය හැකිය.

පළමු ව W බලය නිරූපණය කිරීම සඳහා AB සිරස් රේඛාව අඳින්න.

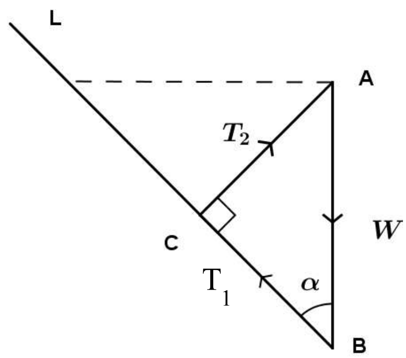
ඉන් පසු BL රේඛාව සිරස සමඟ α කෝණයක් සෑදෙන සේ ඇඳීමෙන් T_1 ආතතියේ දිශාව නිරූපණය කරයි. අඩුතම T_2 සඳහා AC රේඛාව BL ට ලම්බ ව අඳින්න.

දැන් T_2 ආතතිය CA දිග මගින් විශාලත්වය හා දිශාව අතින් නිරූපණය වේ.

$W \longrightarrow AB$

$T_1 \longrightarrow BC$

$T_2 \longrightarrow CA$



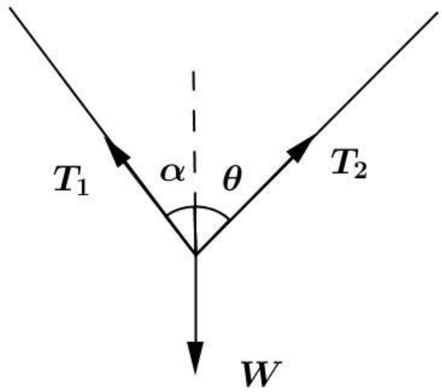
බල ත්‍රිකෝණ නියමයෙන්

$$\frac{W}{AB} = \frac{T_1}{BC} = \frac{T_2}{CA}$$

$$T_1 = W\cos\alpha$$
$$T_2 = W\sin\alpha$$

දෙවන තන්තුවේ ආතතියේ (T_2) දිශාව පළමු තන්තුවට ලම්බ වේ.

අංශුවේ සමතුලිතතාව සඳහා, ලාමීගේ ප්‍රමේය භාවිතයෙන්,



$$\frac{W}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{T_1}{\sin(180\text{-}\theta)} = \frac{T_2}{\sin(180\text{-}\alpha)}$$

$$T_1 = \frac{W\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)} \; ; \; T_2 = \frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}$$

අඩුතම T_2 සඳහා $\sin(\alpha+\theta)$ අගය 1 විය යුතු ය.

[එනම් $\sin(\alpha+\theta)$ අගය උපරිම විය යුතු ය]

එනම් $(\alpha+\theta) = \frac{\pi}{2}$ විය යුතුයි.

$$T_1 = W\sin\theta = W\sin\left[\frac{\pi}{2}-\alpha\right] = W\cos\alpha$$

$$T_2 = W\sin\alpha$$

T_2 දිශාව T_1ට ලම්බක වේ.

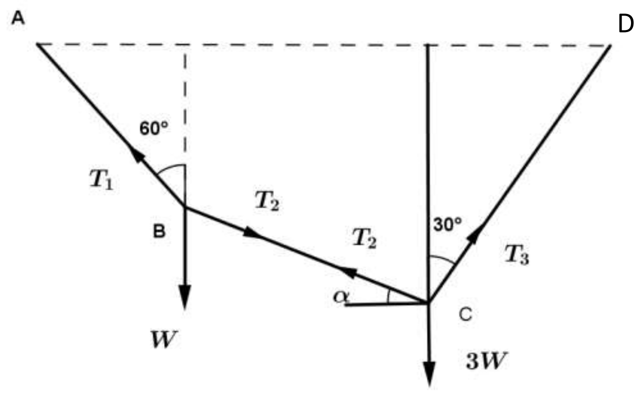
උදාහරණය 12

අප්‍රත්‍යාස්ත ABCD තන්තුවක දෙකෙළවර A හා D එක ම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සවිකර ඇත. W හා 3W වන බාර දෙකක් පිළිවෙළින් B හා C ලක්ෂ්‍යවලින් එල්ලා ඇත. AB හා CD තන්තු කොටස් පිළිවෙළින් සිරස සමඟ 60° හා 30° කෝණ සාදයි. BC තන්තුව තිරස් බව පෙන්වා AB, BC හා CD කොටස්වල ආතති සොයන්න.

BC රේඛාව තිරස සමඟ α කෝණයක් සාදන්නේ යයි ගනිමු.

Bවල සමතුලිතතාව සඳහා

ලාමිගේ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්



$$\frac{T_2}{\sin 120} = \frac{T_1}{\sin(90\text{-}\alpha)} = \frac{W}{\sin(150+\alpha)}$$

$$\frac{T_2}{\sin 60} = \frac{T_1}{\cos\alpha} = \frac{W}{\sin(30-\alpha)} \quad \cdots\cdots$$

C වල සමතුලිතතාව සඳහා

$$\frac{T_2}{\sin 150} = \frac{T_3}{\sin(90+\alpha)} = \frac{3W}{\sin(120-\alpha)}$$

$$\frac{T_2}{\sin30} = \frac{T_3}{\cos\alpha} = \frac{3W}{\sin(60+\alpha)} \quad ....(2)$$

(1) හා (2) න්

$$T_2 = \frac{W\sin60}{\sin(30-\alpha)} = \frac{3W\sin30}{\sin(60+\alpha)}$$

$$\sin60.\sin(60+\alpha) = 3\sin30.\sin(30-\alpha)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right]$$

$$\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha - 3\sin\alpha$$

$$4\sin\alpha = 0; \quad \sin\alpha = 0; \quad \alpha = 0$$

එම නිසා BC තිරස් වේ.

(1)න් $T_1 = \frac{W}{\sin30} = 2W$

(1) න් $T_2 = \frac{W\sin60}{\sin30} = \sqrt{3}\,W$

(2) න් $T_3 = \frac{3W}{\sin60} = 2\sqrt{3}$

උදාහරණය 13

(a) බල $F_1 = 4\underline{i}+2\underline{j}$, $F_2 = 2\underline{i}-5\underline{j}$ සහ $F_3 = -\underline{i}+\underline{j}$ ලක්ෂ්‍යයක් මත ක්‍රියා කරයි. මෙම බල තුනේ සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(b) A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල බණ්ඩාංක පිළිවෙළින් A(2,3), B(5,7) සහ C(-3,15) නම්

i. $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{AC}$ දෛශික $\underline{i}, \underline{j}$ ඇසුරෙන් සොයන්න.

ii. $\underline{F}_1$ හා $\underline{F}_2$ බලවල විශාලත්වය පිළිවෙළින් 20 N හා 65 N වන අතර A ලක්ෂ්‍යයේ දී AB හා AC දිගේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(Ox හා Oy බණ්ඩාංක අක්ෂ ඔස්සේ ඒකක දෛශික පිළිවෙළින් $\underline{i}$ හා $\underline{j}$ වේ.)

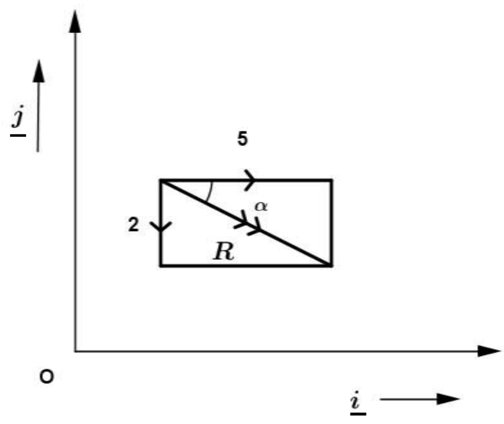
(a) $\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$

$= (4\underline{i}+2\underline{j})+(2\underline{i}-5\underline{j})+(-\underline{i}+\underline{j})$

$= 5\underline{i}-2\underline{j}$

$|\underline{R}| = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

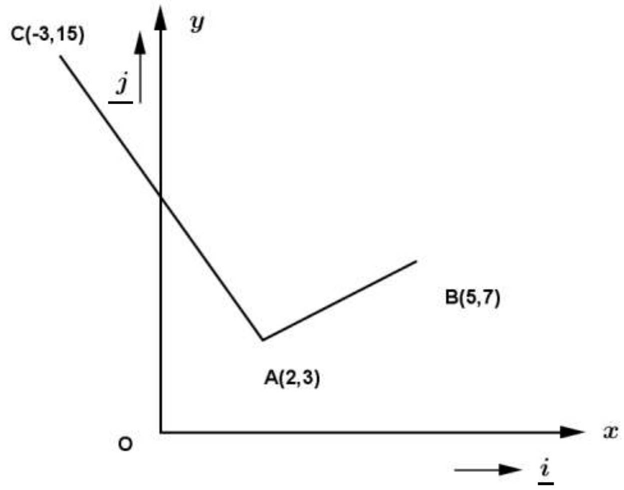
$\tan\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$



b) $A \equiv (2, 3)$, $B \equiv (5, 7)$, $C \equiv (-3, 15)$

$\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = 5\underline{i} + 7\underline{j}$,

$\overrightarrow{OC} = -3\underline{i} + 15\underline{j}$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (5\underline{i} + 7\underline{j}) - (2\underline{i} + 3\underline{j})$

$= 3\underline{i} + 4\underline{j}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= (-3\underline{i} + 15\underline{j}) - (2\underline{i} + 3\underline{j})$

$= -5\underline{i} + 12\underline{j}$

$\overrightarrow{AB}$ ඔස්සේ ඒකක දෛශිකය $\frac{1}{5}(3\underline{\boldsymbol{i}} + 4\underline{\boldsymbol{j}})$

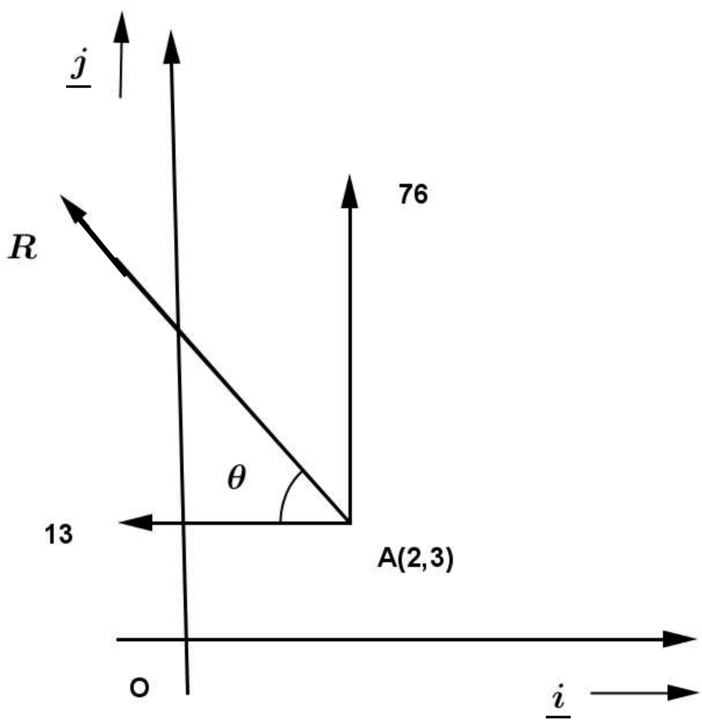
$\overrightarrow{AC}$ ඔස්සේ ඒකක දෛශිකය $\frac{1}{13}(-5\underline{\boldsymbol{i}} + 12\underline{\boldsymbol{j}})$

$F_1 = 20 \times \frac{1}{5}\ (3\underline{i} + 4\underline{j})$

$= 12\underline{i} + 16\underline{j}$

$F_2 = 65 \times \frac{1}{13}(-5\underline{i} + 12\underline{j})$

$= -25\underline{i} + 60\underline{j}$



සම්ප්‍රයුක්තය $\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$

$= (12\underline{i} + 16\underline{j}) + (-25\underline{i}$

$= -13\underline{i} + 76\underline{j}$

$|\underline{R}| = \sqrt{(-13)^2 + 76^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{76}{-13}\right)$

2.8 අභ්‍යාසය

1. P සහ Q බල දෙක O ලක්ෂ්‍යයක දී එකිනෙකට θ කෝණයකින් ආනතව ක්‍රියා කරයි. R යනු සම්ප්‍රයුක්ත බලය ද α යනු R සහ P අතර කෝණය ද වේ.

   a) $P = 6, Q = 8, \theta = 90°$; R සහ α සොයන්න.

   b) $P = 10, Q = 8, \theta = 60°$; R සහ α සොයන්න.

   c) $P = 15, Q = 15\sqrt{2}, \theta = 135°$; R සහ α සොයන්න.

   d) $P = 8, R = 7, \theta = 120°$; Q සහ α සොයන්න.

   e) $P = 7, R = 15, \theta = 60°$; Q සහ α සොයන්න.

2. F සහ $2F$ බල දෙකක් අංශුවක් මත ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලය F බලයට ලම්බක වේ. බල දෙක අතර කෝණය සොයන්න.

3. නිව්ටන් P සහ $2P$ වන බල අංශුවක් මත ක්‍රියා කරයි. පළමු බලය දෙගුණ කර දෙවන බලය නිව්ටන් 10කින් ඉහළ දැමූ විට නව සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ දිශාව වෙනස් නොවූයේ නම් Pවල අගය සොයන්න.

4. අංශුවක් මත P සහ Q බල දෙකක් එකිනෙකට θ කෝණයක් සාදමින් ක්‍රියා කරයි. θහි අගය $60°$ වන විට සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\sqrt{57}$ N හා θ කෝණය $90°$ වන විට සම්ප්‍රයුක්ත බලය $5\sqrt{2}$ N නම් Pහි හා Qහි අගයන් සොයන්න.

5. එක සමාන බල දෙකක් එකිනෙකට 2θ කෝණයකින් ආනත ව ක්‍රියා කරන විට බල දෙකේ සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය, එම බල දෙක 2α කෝණයකින් ආනතව ක්‍රියාකරන විට සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය මෙන් දෙගුණයක් නම් $\cos\theta = 2\cos\alpha$ බව පෙන්වන්න.

6. අංශුවක් මත P සහ Q බල දෙකක් θ කෝණයක් සාදමින් ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය P වේ. නැවත P බලය දෙගුණ කළ විට අලුත් සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය ද P නම් Q බලය විශාලත්වය P හා θ ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.

7. $P, P, \sqrt{3}P$ යන බල අංශුවක් මත ක්‍රියා කරමින් සමතුලිතතාවයේ ඇත. එම බල අතර කෝණ සොයන්න.

8. P හා Q බලවල සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\sqrt{3}Q$ වන අතර $30°$ කෝණයක් P සමඟ සාදයි නම් $P = Q$ හෝ $P = 2Q$ බව පෙන්වන්න.

9. ABCD යනු සමචතුරස්‍රයකි. $P, 2\sqrt{2}P, 2P$ බල A ලක්ෂ්‍යයේ දී පිළිවෙළින් AB, AC, AD ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.

10. ABCD ඍජුකෝණාස්‍රයකි. $AB = 3$m, $BC = 5$ m වේ. නිව්ටන් 6, 10, 12 බල A ලක්ෂ්‍යයේ දී පිළිවෙළින් AB, AC, AD ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.

11. ABCDEF යනු සවිධි ෂඩස්‍රයකි. B ලක්ෂ්‍යයේ දී $2\sqrt{3}$, 4, $8\sqrt{3}$, 2 සහ $\sqrt{3}$ පිළිවෙළින් BC, BD, EB, BF සහ AB ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි නම් සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.

12. ABCD යනු සමචතුරස්‍රයක් වේ. BC සහ CD රේඛාවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් E සහ F වේ. 5, $2\sqrt{5}$, $5\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$, 1 බල A ලක්ෂ්‍යයේ දී පිළිවෙළින් AB, AE, CA, AF, AB ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.

13. ABCD යනු පාදයක දිග 4 cm වන සමචතුරස්‍රයකි. E, F, G, සහ J ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් AB, BC, CD, DA පාද මත පිහිටා ඇත්තේ AE = BF = CG = HD = DJ = 1 cm H ලක්ෂ්‍යය CD මත පිහිටා ඇත්තේ GH = 2 cm වන පරිදිය. විශාලත්වය ඒකක 10, $3\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$, 10, $\sqrt{10}$, 5 බල E ලක්ෂ්‍යයේ දී පිළිවෙළින් EB, EF, EG, EH, EJ, EA ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.

14. ABCයනු සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන අතර G යනු කේන්ද්‍රය වේ. 10, 10 සහ 20 බල G ලක්ෂ්‍යයේ දී පිළිවෙළින් GA, GB සහ GC ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

15. බර 50 N වන A අංශුවක් දිග පිළිවෙළින් 60 cm සහ 80 cm වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකකින් එල්ලා ඇත්තේ එකම තිරස් මට්ටමේ එකිනෙකට 100 cm ඈතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකට තන්තුවල නිදහස් කෙළවරවල් සම්බන්ධ කිරීමෙනි. තන්තුවල ආතතිය සොයන්න.

16. බර 100 N වන A අංශුවක් තිරසට 60කින් ආනත සුමට පෘෂ්ඨයක තබා ඇත. අංශුව සමතුලිත ව තැබීම සඳහා

(a) ආනත තලයට සමාන්තර ව

(b) තිරස් ව

යෙදිය යුතු බලය සොයන්න.

17. බර 30 N වන A අංශුවක් එක ම තිරස් මට්ටමේ 60 cm කින් ඈතින් පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකකට ඇඳා ඇත්තේ පිළිවෙළින් 35 cm සහ 50 cm වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගිනි. තන්තුවල ආතතිය සොයන්න.

18. දිග 120 cm වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් එක ම තිරස් මට්ටමේ එකිනෙකට 60 cm ඈතින් පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකකට ගැට ගසා ඇත. බර 50 N වන මුදුවකට තන්තුව ඔස්සේ නිදහසේ ගමන් කළ හැකිය. තිරසට යෙදූ F බලයක් මගින් මුදුව B ලක්ෂ්‍යයට සිරස් ව පහළින් සිටින සේ සමතුලිතතාවයේ පවතී නම් තන්තුවේ ආතතියද, F බලයේ විශාලත්වය ද සොයන්න.

19. තන්තුවක් එක ම තිරස් මට්ටමේ ඇති ලක්ෂ්‍ය දෙකකට ගැට ගසා ඇත. බර නිව්ටන් W වන මුදුවක් තන්තුව දිගේ නිදහසේ චලිත වේ. මුදුව තිරස් F N බලයක් මගින් අදිනු ලැබේ. සමතුලිත පිහිටීමේ දී එක් එක් කොටස සිරස සමග සාදන කෝණය 60° සහ 30° වේ. F බලයේ අගය ද තන්තුවේ ආතතිය ද සොයන්න.

20. Ox හා Oy යනු එකිනෙකට ලම්බ අක්ෂ වන අතර Ox හා Oy ඔස්සේ ඒකක දෛශික පිළිවෙළින් $\underline{i}$ හා $\underline{j}$ වේ.

a) $\underline{F}_1 = 3\underline{i} + 5\underline{j}$, $\underline{F}_2 = -2\underline{i} + \underline{j}$, $\underline{F}_3 = 3\underline{i} - \underline{j}$ බල අංශුවක් මත ක්‍රියා කරයි. $\underline{\mathbf{F}}_1$, $\underline{\mathbf{F}}_2$ සහ $\underline{\mathbf{F}}_3$ බලවල සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

b) $R_1 = (2P\underline{i} - P\underline{j})$, $R_2 = (-4\underline{i} + 3P\underline{j})$ සහ $R_4 = (2Q\underline{i} - 5\underline{j})$ බල අංශුවක් මත ක්‍රියා කරන අතර අංශුව සමතුලිතතාවයේ පවතී. P සහ Q බලවල විශාලත්වය සොයන්න.

c) A හා B ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින් (3, 4) සහ (-1, 1) වේ. 2, 3, 5, $6\sqrt{2}$ බල O ලක්ෂ්‍යයේ දී පිළිවෙළින් Ox, Oy, OA, OB ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සියලු ම බල $\mathrm{X}\underline{i} + \mathrm{Y}\underline{j}$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කර එනයින් බලවල සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

21. ඍජුකෝණාස්‍රාකාර අක්ෂ Ox හා Oy ඔස්සේ ඒකක දෛශික පිළිවෙළින් $\underline{i}$ හා $\underline{j}$ වේ. P සහ Q බල දෙකක් අංශුවක් මත ක්‍රියා කරනුයේ පිළිවෙළින් $4\underline{i} + 3\underline{j}$ සහ $-3\underline{i} - 4\underline{j}$ දෛශිකවලට සමාන්තර වන ලෙසට ය. බල දෙකෙහි සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය 7N වන අතර එය $\underline{i}$ දෛශිකයේ දිශාවට ක්‍රියා කරයි. P හා Q බලවල විශාලත්වය සොයන්න.

3.0 සමාන්තර බල, ඝූර්ණය, යුග්මය

3.1 සමාන්තර බල

ඉහත පාඩමේ දී අපි ලක්ෂ්‍ය මත දී ක්‍රියාකරන බලවල සම්ප්‍රයුක්තය සොයන ආකාරය පෙන්වා දුන්නෙමු. මෙම පාඩමේ දී අපි සමාන්තර බලවල ක්‍රියාකාරිත්වය හා සම්ප්‍රයුක්ත බලය සොයන ආකාරය ඉගෙන ගනිමු.

සමාන්තර බල ආකාර දෙකකි

i. එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල

කිසියම් බල දෙකක් සමාන්තර වෙයි නම් හා එක ම දිශාවට ක්‍රියාකරයි නම් ඒවා එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල ලෙස හැඳින්වේ. (අභි දිශාව)

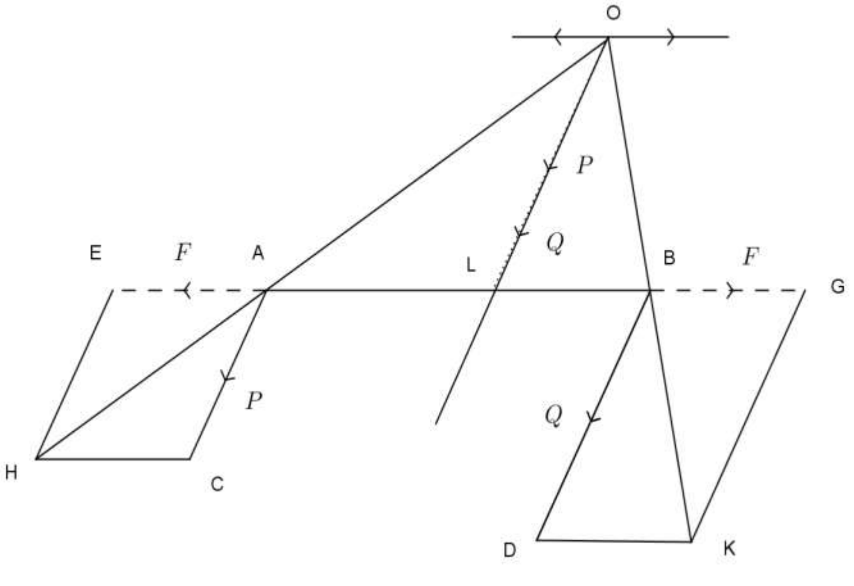
ii. එක ම දිශාවට ක්‍රියා නොකරන සමාන්තර බල

කිසියම් බල දෙකක් සමාන්තර නම් ද හා දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ නම් ද ඒවා එකම දිශාවට ක්‍රියා නොකරන සමාන්තර බල වේ. කිසියම් බල දෙකක් ඡේදනය නොවේ නම් එම බලවල සම්ප්‍රයුක්ත බලය, බල සමාන්තරාස්‍ර ප්‍රමේයය යෙදීමෙන් කෙළින් ම සෙවිය නොහැකිය.

එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල දෙකක සම්ප්‍රයුක්තය

A හා B ලක්ෂ්‍යවල දි එකම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල දෙකක් වන P හා Q පිළිවෙළින් AC හා BD රේඛා මඟින් නිරූපණය කරයි.

A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී විශාලත්වයෙන් සමාන දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ F බල දෙකක් AB රේඛාව ඔස්සේ යොදනු ලැබේ. ඒවා AE හා BG රේඛා මඟින් නිරූපණය කරයි. මෙම සමාන ප්‍රතිවිරුද්ධ බල එකිනෙක තුලනය වන බැවින්, එමඟින් P හා Q බලයට බලපෑමක් ඇති නොවේ.



AEHC හා BDKG සමාන්තරාස්‍ර සම්පූර්ණ කර HA හා KB විකර්ණ O හි දී හමු වන සේ දික් කරනු ලැබේ.

OL රේඛාව AC (හෝ BD) රේඛාවට සමාන්තර ලෙස ඇන්ද විට එය AB හමු වන ලක්ෂ්‍යය L වේ.

A ලක්ෂ්‍යයේ දී P හා F බලයන්ගේ සම්ප්‍රයුක්තය AH මඟින් ද B ලක්ෂ්‍යයේ දී Q හා F බලයන්ගේ සම්ප්‍රයුක්තය BK මඟින් ද පිළිවෙළින් OAH හා OBK රේඛා ඔස්සේ O ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන්නේ යැයි සිතමු.

එම සම්ප්‍රයුක්ත බල නැවත O හි දී විභේදනය කරමු. එවිට P සංරචකය OL ඔස්සේ ද F බලය AE ට සමාන්තර ව ද Q බලය OL ඔස්සේ ද F බලය BG ට සමාන්තර ව ද ක්‍රියා කරයි. F බල විශාලත්වයෙන් සමාන ව හා දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ ව O හි දී තුලනය වේ. එම නිසා මුල් P හා Q බල දෙකේ සම්ප්‍රයුක්තය වන (P + Q) බලය මුල් බල හා එක් දිශාවට ම OL ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

L ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම සෙවීම : OLA හා ACH සමරූපී ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්

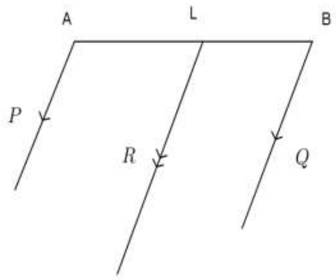
$$\frac{OL}{LA} = \frac{AC}{CH} = \frac{P}{F} \quad \text{..} ①$$

මෙලෙස ම OLB හා BDK සමරූපී ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්

$$\frac{OL}{LB} = \frac{BD}{DR} = \frac{Q}{F} \quad \text{...} ②$$

① හා ② , OL × F = P × LA = Q × LB

$$\frac{LA}{LB} = \frac{Q}{P}$$



එනම් L ලක්ෂ්‍යය මඟින් AB රේඛාව අභ්‍යන්තර ලෙස බල අතර අනුපාතයට බෙදනු ලැබේ.

P . AL = Q.BL සහ සම්ප්‍රයුක්තය R = P + Q

P = Q නම් R සම්ප්‍රයුක්තය මඟින් AB රේඛාව සමච්ඡේදනය කරයි.

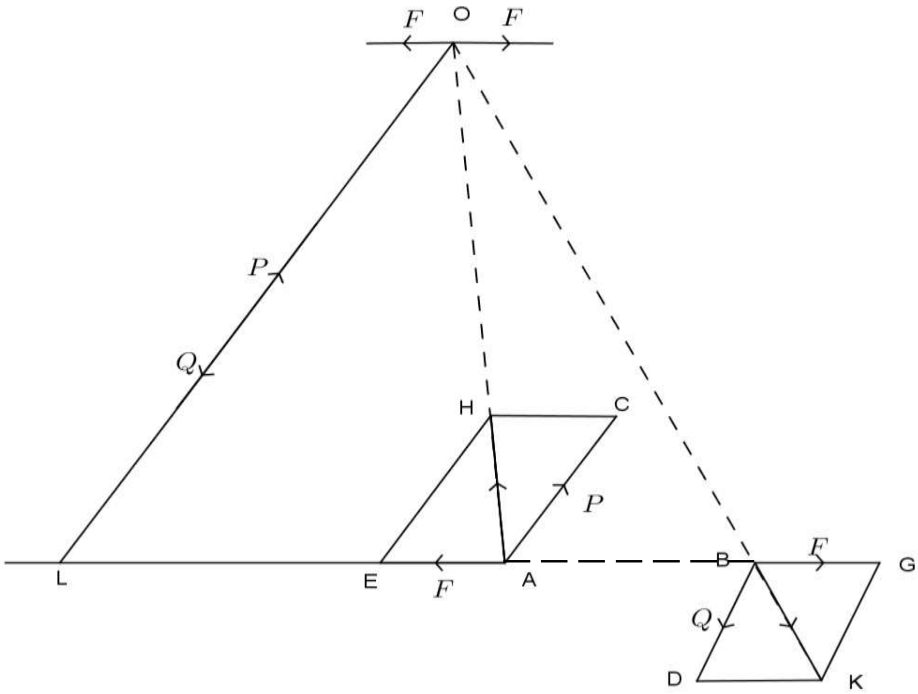
අවස්ථාව (ii)

එකම දිශාවට ක්‍රියා නොකරන සමාන්තර බල දෙකක සම්ප්‍රයුක්තය

එකම දිශාවට ක්‍රියා නොකරන සමාන්තර P හා Q (P > Q) බල දෙකක් A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී පිළිවෙළින් AC හා BD රේඛා ඔස්සේ ක්‍රියා කරන්නේ යයි සිතමු.

A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී විශාලත්වයෙන් එක සමාන, දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ F බල දෙකක් AB ඔස්සේ යොදනු ලැබේ. එම බල AE හා BG මඟින් නිරූපණය කරයි. එම බල එකිනෙකට තුලනය වන අතර P ට හා Q ට බලපෑමක් ඇති නොකරයි. AEHC, BGKD සමාන්තරාස්‍ර සම්පූර්ණ කර AH හා KB විකර්ණ O හි දී හමු වන සේ දික්කරනු ලැබේ. (P = Q නම් එම බලවල සම්ප්‍රයුක්ත එක ලක්ෂ්‍යක දී හමු නො වේ).

OL රේඛාව CA ට (හෝ BD ට) සමාන්තර ලෙස L හි දී දික් කළ AE හමුවන සේ ඇඳ ඇත.



Aහි දී ක්‍රියා කරන P හා F බලවල සම්ප්‍රයුක්තය AH ද Bහි දී ක්‍රියා කරන Q හා F බලවල සම්ප්‍රයුක්තය BK ද Oහි දී AO හා OB ඔස්සේ ක්‍රියා කරන්නේ යැයි සිතමු. මෙම සම්ප්‍රයුක්ත බල Oහි දී විභේදනය කරනු ලැබේ. එවිට P සංරචකය LO ඔස්සේ ද F බලය AEට සමාන්තර ව ද Q බලය OLඔස්සේ F බලය BGට සමාන්තර ව Oහි දී ක්‍රියාකරන්නේ යැයි සිතමු. F බල විශාලත්වයෙන් සමාන හා දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ නිසා එකිනෙකට තුලනය වේ. එම නිසා P හා Q බල දෙකේ සම්ප්‍රයුක්තය තනි (P - Q) බලයකට සමාන වන අතර LO රේඛාව දිගේ P බලයේ දිශාවට ක්‍රියා කරයි.

L ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම

OLA හා HEA සමරූපී ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්

$$\frac{OL}{LA} = \frac{HE}{EA} = \frac{P}{F} \Rightarrow P.LA = F.OL \qquad \text{......................................} \qquad ①$$

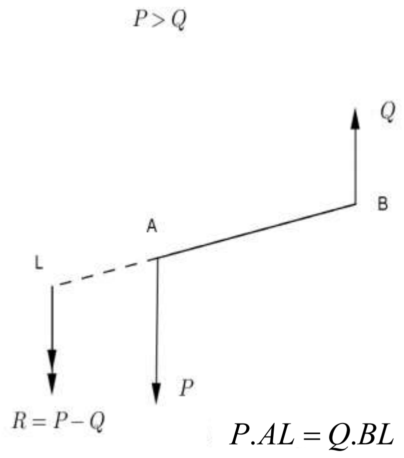
මෙලෙස ම OLB සහ BDK සමරූපී ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්

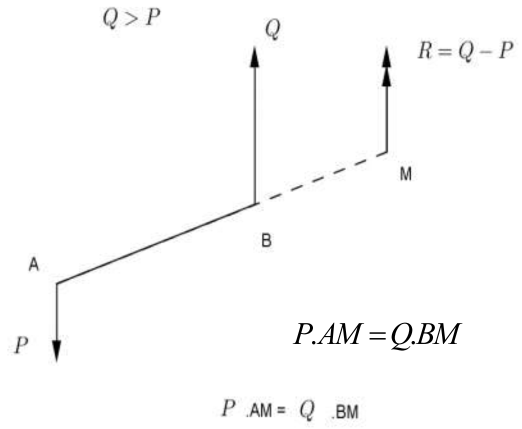
$$\frac{OL}{LB} = \frac{BD}{DK} = \frac{Q}{F} \Rightarrow Q.LB = F.OL \qquad \text{......................................} \qquad ②$$

① හා ② න් $\quad \frac{LA}{LB} = \frac{Q}{P}$

එනම් L ලක්ෂ්‍යය මඟින් AB රේඛාව බාහිරයෙන් බෙදනු ලබන අතර එම දුර අතර අනුපාතය බල අතර ප්‍රතිලෝම අනුපාතයට සමාන වේ.

P = Q නම් AEH හා BGK ත්‍රිකෝණ සම්පූර්ණ කළ විට AH හා KB සමාන්තර නිසා ඒවා O ලක්ෂ්‍යයේ දී හමු නොවේ.





සමාන්තර බල සමූහයක සම්ප්‍රයුක්තය සෙවීම

(i) සමාන්තර බල එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන විට

එකම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල දෙකක සම්ප්‍රයුක්තය සොයන ආකාරය නැවත නැවත යෙදීමෙන් එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල සමූහයක සම්ප්‍රයුක්තය සෙවිය හැකිය.

එවිට සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය එම සමාන්තර බලවල විශාලත්වල එකතුවට ද දිශාව එම සමාන්තර බල ක්‍රියා කරන දිශාවට ද සමාන වේ.

(i) සමාන්තර බල එක ම දිශාවට නොවන විට

එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල වෙන් කර ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය ඉහත සඳහන් කළ ක්‍රමයේ ආකාරයට සොයා ගනු ලැබේ. ඉන්පසු එම විරුද්ධ දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල දෙකේ සම්ප්‍රයුක්තය පහත ආකාරයට සොයා ගනු ලැබේ.

a) බල දෙක අසමාන නම් සම්ප්‍රයුක්ත බලය තනි බලයක් වන අතර විශාලත්වය බලවල විජීය එකතුවට සමාන වේ.

b) (i) එම බල සමාන හා එම බලවල ක්‍රියා රේඛා සමපාත වූ විට සම්ප්‍රයුක්ත බලය ශූන්‍ය වන අතර එවිට බල සියල්ල සමතුලිත වේ.

(ii) එම බල සමාන වී ක්‍රියා රේඛා සමපාත නොවූයේ නම් එමඟින් බල යුග්මයක් සාදයි.

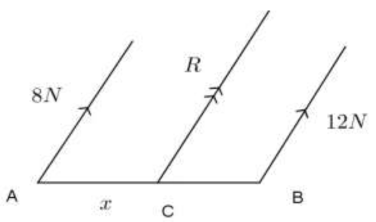
3.2 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණය 1

1) එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල දෙකක් වන 8N හා 12 N පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරයි. AB = 15 cm නම්

a. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය ද සම්ප්‍රයුක්තය AB කපන ලක්ෂ්‍යය ද සොයන්න.

b. මෙම බල දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ නම් සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය ද ක්‍රියා රේඛාව ද සොයන්න.



(a) $R = P+Q = 8+12 = 20N$

$8.AC = 12.BC$

$8x = 12(15-x)$

$20\,x = 12 \times 15$

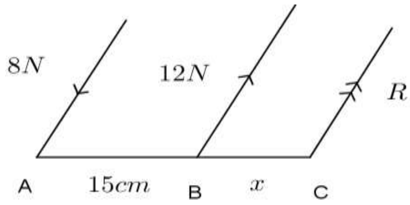
$AC = 9$ cm

(b) $R = 12-8 = 4N$

$12x = (15+x)8$

$4x = 15 \times 8$

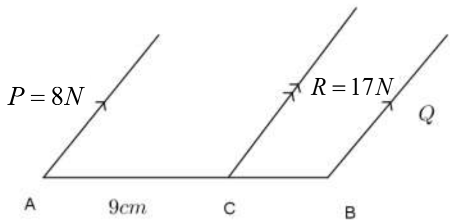
$x = 30$ cm



2) පහත සඳහන් උදාහරණවල P හා Q බල ක්‍රියා කරන ලක්ෂ්‍ය A හා B නම් සහ සම්ප්‍රයුක්තය AB රේඛාව හමු වන ලක්ෂ්‍යය C නම්

i. P හා Q එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල නම් P = 8 N, R = 17 N, AC = 9 cm විට Q සහ AB සොයන්න.

ii. P හා Q ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල නම් P = 6N AC = 18 cm , CB = 16 cm විට Q හා R සොයන්න.



$P + Q = 17$

$Q = 17 - 8$

$= 9$ N

$AC:CB = 9:8$

$\therefore AB = 17$

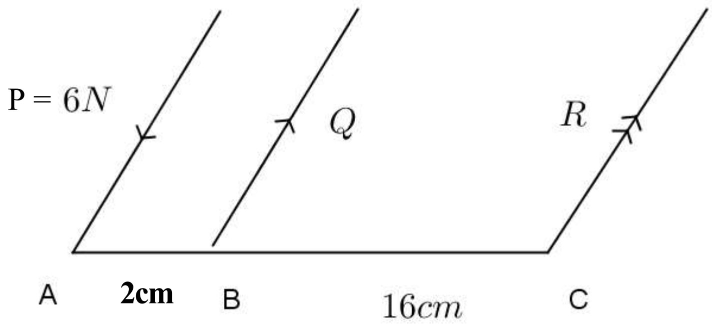
$6 \times 18 = Q \times 16$

$Q = \dfrac{27}{4}$ N

$R = Q-P$

$R = \dfrac{27}{4} - 6$

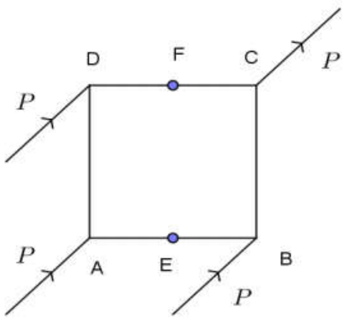
$R = \dfrac{3}{4}$ N



3) එක ම දිශාවට ක්‍රියාකරන සමාන බල හතරක් සමචතුරස්‍රයක ශීර්ෂවල දී ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලය සමචතුරස්‍රයේ කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරන බව පෙන්වන්න.

ක්‍රියා කරන බල PN යයි ගනිමු.

A ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන P හා B ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන P යන සමාන්තර බල දෙකේ සම්ප්‍රයුක්තය බලය වන 2P, AB රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන Eහි දී ක්‍රියා කරයි.



C හා D ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරන P සමාන්තර බලවල සම්ප්‍රයුක්තය 2P වන අතර එය CDහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන Fහි දී ක්‍රියා කරයි.

දැන් 2P සමාන්තර බල දෙකේ සම්ප්‍රයුක්තය 4P වන අතර එය EFවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරයි. එනම් සමචතුරස්‍රයේ කේන්ද්‍රය හරහා යයි.

එනම් බලවල සම්ප්‍රයුක්තය සමචතුරස්‍රයේ කේන්ද්‍රය හරහා යයි.

4) P හා Q යනු එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල වෙයි. Q බලය දිශාව වෙනස් නොකර ක්‍රියා කරන ලක්ෂ්‍යය x දුරකින් විස්ථාපනය කළ විට Pහි හා Qහි සම්ප්‍රයුක්ත බලය විස්ථාපනය වන දුර සොයන්න.

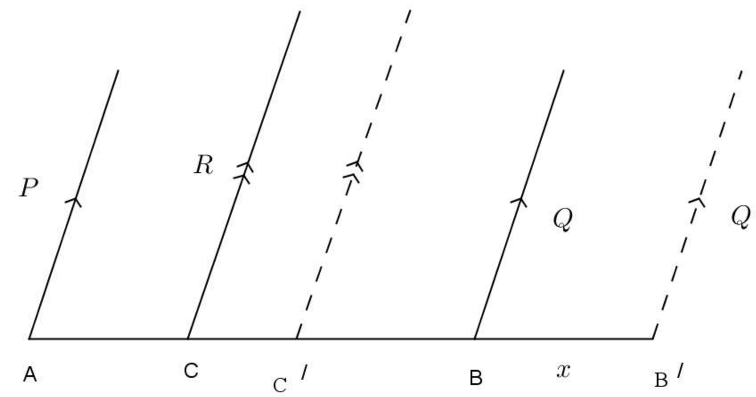
P හා Q බල පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියා කරන්නේ යයි ද එම බලවල සම්ප්‍රයුක්ත බලය R , AB රේඛාව C ලක්ෂ්‍යයේ දී කපන්නේ යයි ද ගනිමු.

එවිට

$$\frac{AC}{CB}=\frac{Q}{P}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{Q}{P+Q}$$

$$AC=\left(\frac{Q}{P+Q}\right)AB$$



දැන් Q බලය x දුරක් විස්ථාපනය කළ විට සම්ප්‍රයුක්තය AB රේඛාව $C^{/}$ ලක්ෂ්‍යයේ කපන්නේ නම්, එවිට

$$\frac{AC^{/}}{C^{/}B^{/}}=\frac{Q}{P}$$

$$AC^{/}=\left(\frac{Q}{P+Q}\right)AB^{/}=\left(\frac{Q}{P+Q}\right)\left(AB+x\right)$$

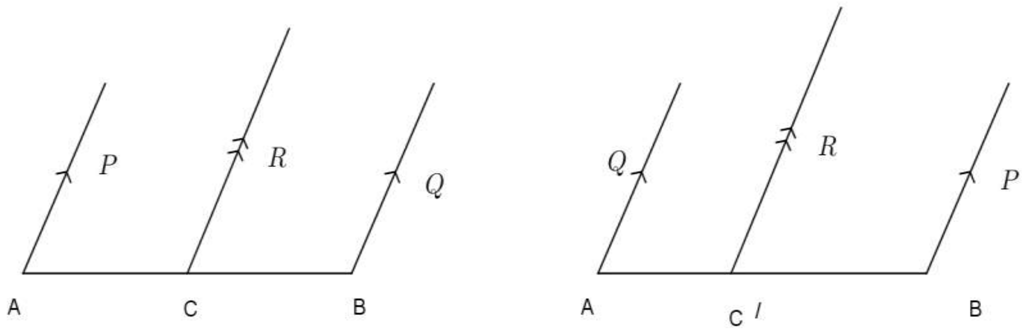
එම නිසා සම්ප්‍රයුක්තය විස්ථාපනය වූ දුර

$$CC' = AC' - AC$$

$$CC' = \left(\frac{Q}{P+Q}\right)\left[AB + x - AB\right]$$

$$CC' = \left(\frac{Q}{P+Q}\right)x$$

5) එකම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල දෙකක් වන P හා Q පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරයි. එම P හා Q බල මාරු කළ විට සම්ප්‍රයුක්ත බලය AB කපන ලක්ෂ්‍ය $\left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)AB$ දුරකින් වෙනස් වන බව පෙන්වන්න.



$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

$$AC = \left(\frac{Q}{P+Q}\right)AB$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{P}{Q}$$

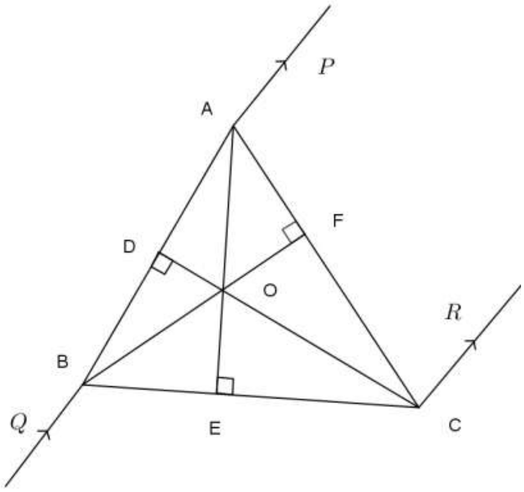
$$AC' = \left(\frac{P}{P+Q}\right)AB$$

$$AC' - AC = \left(\frac{P}{P+Q}\right)AB - \left(\frac{Q}{P+Q}\right)AB$$

$$= \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)AB$$

6) එකම දිශාවට ක්‍රියා කරන P, Q හා R සමාන්තර බල තුනක් පිළිවෙලින් ABC ත්‍රිකෝණයක A, B හා C ශීර්ෂ මත ක්‍රියා කරයි. එම බලවල තුනෙහි සම්ප්‍රයුක්ත බලය ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරයි නම්

P : Q : R = tan A : tan B : tan C බව පෙන්වන්න.



O යනු ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රය යි.

බලවල සම්ප්‍රයුක්තය O හරහා ගමන් කරයි නම් P හා Q බලවල සම්ප්‍රයුක්තය D හරහා ගමන් කළ යුතුය, **(CD $\perp$ AB නිසා)**.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{Q}{P} = \frac{CD\cot A}{CD\cot B}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{\tan B}{\tan A} \quad \text{..(1)}$$

එසේම Q හා R බලවල සම්ප්‍රයුක්තය E හරහා ගමන් කළ යුතුයි. (AE $\perp$ BC නිසා)

$$\frac{BE}{EC} = \frac{R}{Q} = \frac{AE\cot B}{AE\cot C} = \frac{\tan C}{\tan B} \quad \text{..................................(2)}$$

$$(1)\,,\,(2) \quad \Rightarrow \; P : Q : R = \tan A : \tan B : \tan C$$

3.3 අභ්‍යාසය

1. එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන 2, 5, 3 N වන සමාන්තර බල ABC ත්‍රිකෝණයක පිළිවෙළින් A, B, C ශීර්ෂවලදී ක්‍රියා කරයි. AB = 4 cm, BC = 3 cm හා AC = 5 cm වේ.

   i) සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය සොයන්න.

   ii) සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාව ක්‍රියා කරන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

2. විශාලත්වය P, P, 2P වන එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල තුනක් A, B, C ත්‍රිකෝණයක පිළිවෙළින් A, B හා C ශීර්ෂවල දී ක්‍රියා කරයි. බලවල සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව C ලක්ෂ්‍යයේ සිට AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට අඳින ලද රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරන බව පෙන්වන්න.

3. එකම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල හතරක් සමචතුරස්‍රයක ශීර්ෂ මත ක්‍රියා කරයි. බලවල සම්ප්‍රයුක්තය සමචතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ හරහා ගමන් කරන බව පෙන්වන්න.

4. P, Q හා R යන එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල තුනක් ABC ත්‍රිකෝණයක පිළිවෙළින් AB හා C ශීර්ෂ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි නම් සහ එම බලවල සම්ප්‍රයුක්තය ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරයි නම්

   $\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}=\frac{R}{AB}$ බව පෙන්වන්න.

5. බල හතරක් $\overline{AB}, 2\overline{BC}, 3\overline{CD}$ සහ $4\overline{DA}$ මගින් නිරූපණය වේ. මෙහි ABCD සමචතුරස්‍රයකි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

6. එකම දිශාවට ක්‍රියා නොකරන සමාන්තර බල දෙකක් වන P හා Q $(P > Q)$ පිළිවෙළින් A සහ B ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරයි. එම බලවල විශාලත්වය S ප්‍රමාණයකින් වැඩි කළ විට සම්ප්‍රයුක්තය $\frac{S.(AB)}{P-Q}$ දුර ප්‍රමාණයකින් වෙනස් වන බව පෙන්වන්න.

7. එකම දිශාවට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බල තුනක් වන P, Q හා R යන බල ABC ත්‍රිකෝණයක පිළිවෙළින් A, B හා C ශීර්ෂ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

   (i) සම්ප්‍රයුක්ත බලය ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරයි නම් P = Q = R බව ද

   (ii) පරිවෘත්ත කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරයි නම් $\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}$ බව ද පෙන්වන්න.

8. විශාලත්වය P, 2P, 3P වන සමාන්තර බල තුනක් OABC සරල රේඛාවක පිළිවෙළින් A, B හා C ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරයි. මෙහි OA = a, AB = b සහ BC = c වේ. බලවල සම්ප්‍රයුක්තය OABC රේඛාව මත පිහිටි $OD=\frac{6a+5b+3c}{2}$ වන පරිදි D ලක්ෂ්‍ය හරහා යන බව පෙන්වන්න.

3.4 ඝූර්ණය

දෘඪ වස්තුවක් මත බල ක්‍රියා කරන විට එම දෘඪ වස්තුවේ ලක්ෂ්‍යයක් අචල ව සවි කර ඇති විට සමහර අවස්ථාවල දී එම වස්තුව එම ලක්ෂය වටා භ්‍රමණය වීම සිදු වේ.

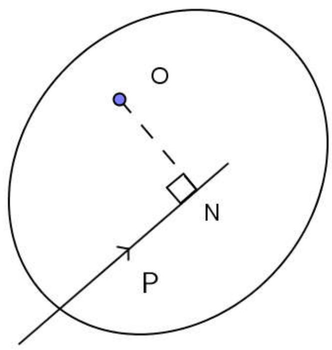
මෙලෙස යම් වස්තුවක් යම් ලක්ෂ්‍යයක් වටා ඇති කරන භ්‍රමණය එම ලක්ෂ්‍යය වටා එම බලයේ ඝූර්ණය ලෙස හැඳින්විය හැක. දෘඪ වස්තුවක් එක් ලක්ෂ්‍යයකින් සවිකර එම වස්තුව මත බලයක් පමණක් ක්‍රියා කරයි නම් එම බලයේ ක්‍රියා රේඛාව එම අචල ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් නොකරයි නම් එම වස්තුව එම බලය යටතේ භ්‍රමණය වේ.

අර්ථ දැක්වීම :

දෙන ලද ලක්ෂ්‍යයක් වටා බලයක ඝූර්ණය යනු එම බලයේ විශාලත්වයේත් එම ලක්ෂ්‍යයේ සිට බලයේ ක්‍රියා රේඛාවට ඇති ලම්බ දුරෙහිත් ගුණිතය යි.

සටහන:

බලයේ ක්‍රියා රේඛාව O ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි නම් එම O ලක්ෂ්‍ය වටා ඝූර්ණය ශූන්‍ය වේ.



O යනු වස්තුව මත අචල ලක්ෂ්‍යයක් නම් සහ O ලක්ෂ්‍යයේ සිට P බලයේ ක්‍රියා රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර, ON නම් O ලක්ෂ්‍යය වටා P බලයේ ඝූර්ණය $P \times ON$ වන අතර ඔරලෝසුවේ කටු කැරකෙන දිශාවට විරුද්ධ දිශාවට වස්තුව හැරීමට ලක් වේ.

Om ලක්ෂ්‍යය වටා ඝූර්ණය = $P \times ON$

ඝූර්ණය මනින SI ඒකකය නිව්ටන් මීටර් Nm වේ. දෙන ලද ලක්ෂ්‍යය වටා වස්තුවක ඝූර්ණය ඔරලෝසුවේ කටු කැරකෙන දිශාව හෝ ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාව හෝ අනුව ධන හෝ ඍණ හෝ වේ.

වස්තුවක් මත බල සමූහයක් ක්‍රියා කරන විට යම් ලක්ෂ්‍යයක් වටා එම බලවල ඝූර්ණයන්ගේ වීජ ඓක්‍ය එම ලක්ෂ්‍යය වටා එක් එක් බලයේ ඝූර්ණය ලකුණ සමඟ එකතු කිරීමෙන් ලබාගත හැකිය.

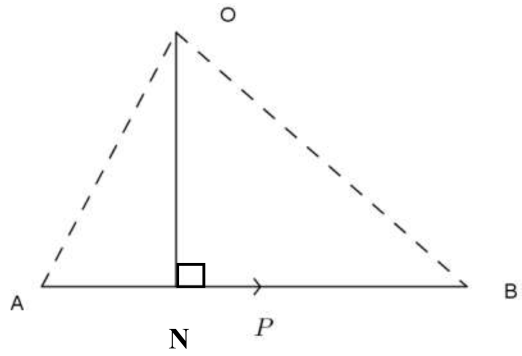
බලයක ඝූර්ණය දෛශිකයක් වන අතර එයට විශාලත්වයක් හා දිශාවක් ඇත.

ඝූර්ණය ජ්‍යාමිතිකව ව නිරූපණය කිරීම

P බලය විශාලත්වය හා දිශාව අතින් AB රේඛා ඛණ්ඩයෙන් නිරූපණය කරන්නේ යයි සිතමු. O ලක්ෂ්‍යය වටා ඝූර්ණය සෙවීමට අවශ්‍ය යයි සිතමු. ON යනු O සිට AB රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර යි. එනම් P බලයේ O ලක්ෂ්‍යය වටා ඝූර්ණය $P \times ON = AB \times ON$

එහෙත් $\frac{1}{2}AB \times ON$ යනු OAB ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයයි.

AB පාදය මගින් බලය ද O ශීර්ෂය මගින් ඝූර්ණය ගනු ලබන ලක්ෂ්‍යය ද නිරූපණය කරයි නම් එම ලක්ෂ්‍යය වටා බලයේ ඝූර්ණයේ විශාලත්වය සංඛ්‍යාත්මක ලෙස ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් වේ. $P.\ ON = 2\Delta OAB$



සටහන :

ඝූර්ණයේ සමහර මූලික සිද්ධාන්ත සාධනය කිරීම සඳහා ජ්‍යාමිතික ඉදිරිපත් කිරීම් භාවිත කරනු ලැබේ.

වැරිග්නෝන්ගේ ප්‍රමේයය (වරින්යෝ ප්‍රමේයය)

එක ම තලයේ ක්‍රියා කරන බල දෙකක් එම තලයේ ලක්ෂ්‍යයක් වටා ඇති කරන ඝූර්ණයන්ගේ වීජ ඓක්‍යය එම බල දෙකේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය මගින් එම ලක්ෂ්‍යය වටා ඇති කරන ඝූර්ණයට සමාන වේ. මෙහි දී අවස්ථා දෙකක් සලකනු ලැබේ.

(i) බල සමාන්තර නොවන විට

(ii) බල සමාන්තර වන විට

අවස්ථාව (i) බල සමාන්තර නොවන විට

සාධනය : බල එක ලක්ෂ්‍යයක දී හමුවන අවස්ථාව

P හා Q බල A ලක්ෂයේ දී ක්‍රියා කරයි. O යනු එම තලයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් නම් සහ එම ලක්ෂ්‍යය වටා එම බලවල ඝූර්ණය ලබා ගන්නා ලද නම් OC රේඛාව P බලයට සමාන්තර ව අඳින්න. Q බලයේ ක්‍රියා රේඛාව Dහි දී හමු වන පරිදි ABCD සමාන්තරාස්‍රය සම්පූර්ණ කරන්න.

එවිට Q බලයේ විශාලත්වය AD මගින් ද P බලයේ විශාලත්වය AB මගින් ද නිරූපණය වේ.

OA හා OB සම්බන්ධ කරන්න. AC මගින් P හා Q බලවල සම්ප්‍රයුක්තය R නිරූපණය කරයි.

ඉහත ආකාරයට O සඳහා පිහිටුම් දෙකක් ඇත.

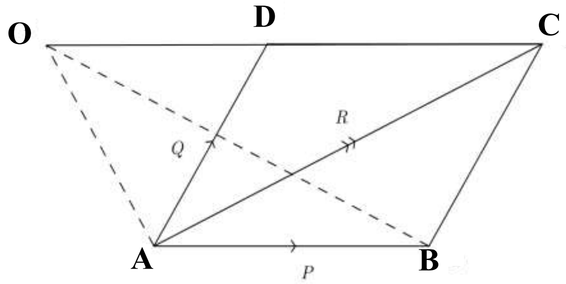
අවස්ථා දෙකේ ම O වටා P ගේ ඝූර්ණය = 2OAB Δ වර්ගඵලය

O වටා Q බලයේ ඝූර්ණය = 2OAD Δ වර්ගඵලය

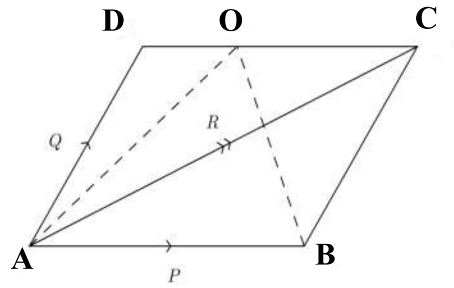
O වටා R බලයේ ඝූර්ණය = 2OAC Δ වර්ගඵලය

පළමු රූපයේ Om වටා P සහ Q බලවල ඝූර්ණවල එකතුව $= 2\Delta OAB + 2\Delta OAD$

$= 2\Delta ABC + 2\Delta OAD$



(i)



(ii)

$= 2\Delta ACD + 2\Delta OAD$

$= 2\Delta OAC$

= Om වටා R හි සූර්ණය

රූපය (ii)

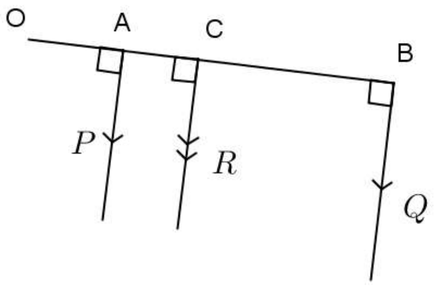
Om වටා P හා Q බලවල සූර්ණවල එකතුව $= 2\Delta OAB - 2\Delta AOD$

$= 2\Delta ABC - 2\Delta AOD$

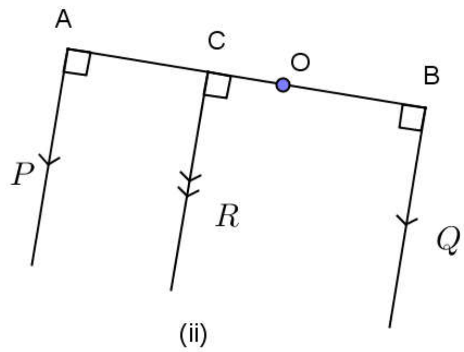
$= 2\Delta ADC - 2\Delta AOD$

$= 2\Delta AOC$

= Om වටා R හි සර්ණය



(i)



(ii)

අවස්ථාව (ii) බල සමාන්තර වන විට

P හා Q යනු එක ම දිශාවට ක්‍රියාකරන සමාන්තර බල දෙකක් නම් හා O යනු ඉහත දැක්වෙන ආකාරයට එම තලයේ ලක්ෂ්‍යයක් නම් එම බලවල ක්‍රියා රේඛාවලට ලම්බක ලෙස OAB රේඛාව අඳිනු ලැබේ. එම බලවල ක්‍රියා රේඛා OAB රේඛාව හමු වන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් A හා B නම් P හා Q වල R සම්ප්‍රයුක්තය C හරහා ක්‍රියාකරයි. OC රේඛාව R බලයට ලම්බ වේ $AC : CB = Q : P$

රූපය (i) Oo වටා P සහ Q බලවල සූර්ණයේ එකතුව $= P \times OA + Q \times OB$

$= P(OC - AC) + Q(OC + CB)$

$= (P + Q)OC - P \times AC + Q \times CB$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$ නම්

$$P \times AC = Q \times CB$$

සූර්ණවල එකතුව = (P + Q) × OC

= O○ වටා R හි සූර්ණය

රූපය (ii)

Om වටා P හා Q බලවල සූර්ණවල එකතුව

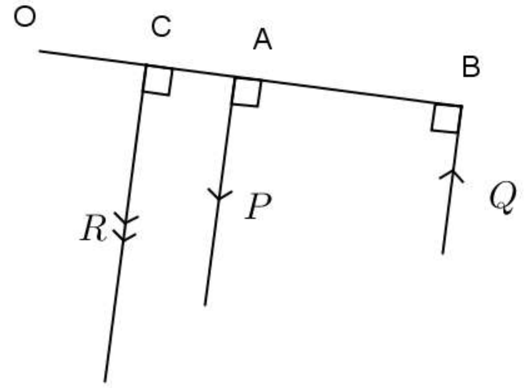
= P × OA - Q × OB

= P(OC + CA) - Q(CB - OC)

= (P + Q)OC + P × AC - Q × CB

= (P + Q) OC

= Om වටා Rහි සූර්ණය



බල සමාන්තර හා දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ නම්

P හා Q දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ සමාන්තර බල නම් සහ P > Q නම්

සම්ප්‍රයුක්ත බලය R= P - Q

O○ වටා සූර්ණවල එකතුව

= P × OA - Q × OB

= P(OC + CA) - Q(OC + CB)

=(P - Q)OC + P × AC - Q × CB

= (P - Q) OC

= O වටා R හි සූර්නය

සටහන : සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ පිහිටි සෑම ලක්ෂ්‍යයක් වටා සූර්ණයන්ගේ වීජ එකතුව ශූන්‍ය වේ.

ප්‍රමේයය

දෘඪ වස්තුවක් මත එක ම තලයේ ක්‍රියා කරන බාහිර බල සමූහයක් නිසා සම්ප්‍රයුක්තයක් පවතින විට එම තලයේ පිහිටි කවර හෝ ලක්ෂ්‍යයක් වටා වස්තුව මත ක්‍රියා කරන බාහිර බලවල වීජ ඓක්‍යය එම බලවල සම්ප්‍රයුක්තය මඟින් එම ලක්ෂ්‍යය වටා ඇති කරන ඝූර්ණයට සමාන වේ. මෙය ඝූර්ණ පිළිබඳ සාධාරණ මූල ධර්මය ලෙස හැඳින්වේ.

එක තලයේ ක්‍රියා කරන බල පද්ධතියක් යටතේ දෘඪ වස්තුව සමතුලිත ව ඇත්නම් එම බලවල සම්ප්‍රයුක්ත බලය ශුන්‍ය වේ. එම නිසා එම තලයේ සෑම ලක්ෂ්‍යයක් වටාම සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ඝූර්ණය ශුන්‍ය වේ.

එම නිසා එක ම තලයේ ක්‍රියා කරන බල පද්ධතියක් සමතුලිත නම් එම තලයේ සෑම ලක්ෂ්‍යයක් ම වටා එම බලවල වීජ ඓක්‍යය ශුන්‍ය වේ.

එහෙත් විලෝමය සත්‍ය නොවේ.

> ඒකතල බල පද්ධතියක බල පද්ධතිය පිහිටා ඇති තලය මත වූ ලක්ෂයක් වටා ඝූර්ණවල වීජ ඓක්‍යය ශුන්‍ය වූ පමණින් එම බල පද්ධතිය සමතුලිත යයි කිව නොහැකි ය. එනම් එම බලවල සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව එම ලක්ෂ්‍යය හරහා වැටී තිබිය හැකි බැවිනි.

3.5 විසඳූ නිදසුන්

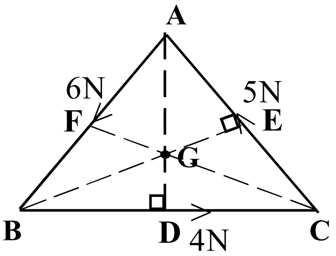
නිදසුන 7

පැත්තක දිග 2m වන ABC සහ සමපාද ත්‍රිකෝණයක BC, CA සහ AB පාද ඔස්සේ නිච්චටන් 4, 5, 6 බල ක්‍රියා කරයි. ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රකය වටා බලවල ඝූර්ණවල වීජ ඓක්‍යය සොයන්න.

G යනු කේන්ද්‍රකය නම් $AD = 2\sin 60$

$$= 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}m$$

$$GD = GE = GF \quad = \frac{1}{3}\sqrt{3}m$$



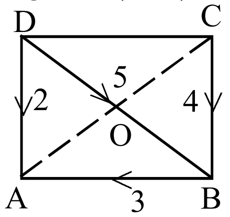
G වටා ඝූර්ණවල වීජ ඓක්‍ය $= 4\times\frac{1}{\sqrt{3}} + 5\times\frac{1}{\sqrt{3}} + 6\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}\,\text{Nm}$$

නිදසුන 8

පැත්තක දිග 4m වන ABCD සමචතුරස්‍රයක නිච්චටන් 4, 3, 2 සහ 5බල පිළිවෙළින් CB, BA, DA සහ DB පාද ඔස්සේ ක්‍රියාකරයි. බලවල ඝූර්ණයන්ගේ වීජ ඓක්‍යය

(i) C ශීර්ෂයේ වටා (ii) කේන්ද්‍රය O වටා සොයන්න.



$$CO = 4\cos 45 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

C වටා බලවල ඝූර්ණවල වීජ ඓක්‍යය $= 2\times 4 - 3\times 4 + 5\times 2\sqrt{2}$

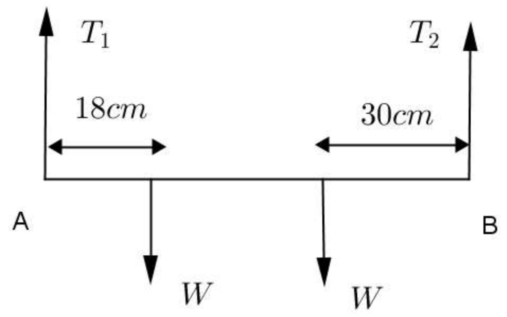
$= (10\sqrt{2} - 4)$ Nm

O වටා බලවල ඝූර්ණවල වීජ ඓක්‍යය $= 4\times 2 + 3\times 2 - 2\times 2$

$= 10$ Nm

නිදසුන 9

72 cm දිග සැහැල්ලු දණ්ඩක එක් කෙළවරක සිට 18 cm දුරින් සහ අනෙක් කෙළවරේ සිට 30 cm දුරකින් එක සමාන බර දෙකක් එල්ලා ඇත. දණ්ඩ තිරස්ව සමතුලිත ව තබා ඇත්තේ දණ්ඩේ දෙකෙළවරට සම්බන්ධ කරන ලද සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මඟිනි. තන්තුවලට දැරිය හැකි උපරිම ආතතිය 50 N නම් බරවලට තිබිය හැකි උපරිම විශාලත්වය සොයන්න.



බර W ද තන්තුවල ආතති T_1, T_2 යයි ද ගනිමු.

දණ්ඩේ සමතුලිතතාව සඳහා බල සිරසට විභේදනයෙන්

$\uparrow T_1 + T_2 - 2W = 0$

B වටා ඝූර්ණය $\quad T_1 \times 72 + W \times 54 + W \times 30 = 0$

$$72T_1 = 84W$$

T_1 ආතතිය උපරිම වන විට ($T_1 = 50$)

$$72 \times 50 = 84W$$

$$W = \frac{72 \times 50}{84} = 42\frac{6}{7}N$$

A වටා ඝූර්ණය $T_2 \times 72 - W \times 18 - W \times 42 = 0$

$72T_2 = 60$ W, T_2 ආතතිය උපරිම වන විට ($T_2 = 50$)

$$W = \frac{72 \times 50}{60} = 60 \text{ N}$$

එම නිසා එල්ලිය හැකි උපරිම බර $42\frac{6}{7}$ N

නිදසුන 10

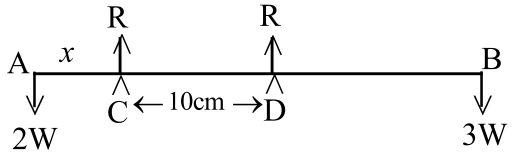
20cm දිග AB වන සැහැල්ලු දණ්ඩක් එකිනෙකට 10 cm දුරින් පිහිටි කුඩා කුඤ්ඤ දෙකක් මත තබා බර 2W සහ 3W අංශු දෙකක් පිළිවෙළින් A සහ B දෙකෙළවරින් එල්ලා ඇත. කුඤ්ඤ මඟින් දණ්ඩ මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියා සමාන වීමට එක් එක් කෙළවරේ සිට කුඤ්ඤයක පිහිටුම සොයන්න.

A සිට $x$cm දුරකින් C කුඤ්ඤය පවතී යයි සිතමු.

දණ්ඩ සමතුලිතව ඇති විට C ලක්ෂ්‍යය වටා ඝූර්ණවල වීජ ඓක්‍යය ශුන්‍ය වේ.

$$R \times 10 + 2Wx - 3W(20 - x) = 0$$

$$10R = 60W - 5Wx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



On වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$R \times 10 + 3W(10 - x) - 2W(10 + x) = 0$$

$$10R = 5Wx - 10W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) සහ (2) $\quad 10x = 70$

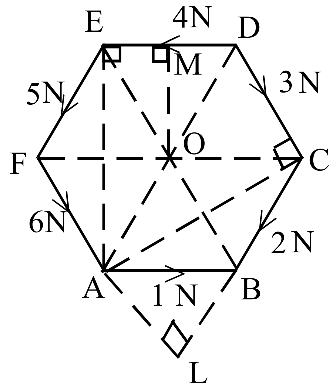
$$x = 7$$

A කෙළවරේ සිට කුඤ්ඤ දෙකට දුර 7cm සහ 17cm

නිදසුන 11

පැත්තක දිග $2\ m$ වන ABCDEF සවිධි ෂඩස්‍රයක පාද ඔස්සේ නිව්ටන් 1, 2, 3, 4, 5, 6 බල පිළිවෙළින් AB, CB, DC, DE, EF සහ FA ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. බලවල සූර්ණයන්ගේ වීජ ඓක්‍යය

(i) A ශීර්ෂය වටා (ii) ෂඩස්‍රයේ කේන්ද්‍රය O වටා සොයන්න.



$AL = 2\sin 60$

$= \sqrt{3}m$

A වටා සූර්ණයන්ගේ වීජ ඓක්‍යය

$= 2 \times \sqrt{3} + 3 \times 2\sqrt{3} - 4 \times 2\sqrt{3} - 5 \times \sqrt{3}$

$= -5\sqrt{3}$

Am වටා $= 5\sqrt{3}$ Nm

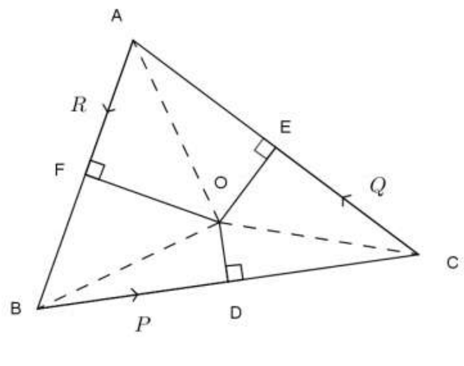
$OM = 2\sin 60 \quad = \sqrt{3}m$

Om වටා සූර්ණයේ වීජ ඓක්‍ය $= 1 \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{3} - 3 \times \sqrt{3} + 4 \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{3} + 6 \times \sqrt{3}$

$$= 11\sqrt{3} \text{ Nm}$$

නිදසුන 12

P, Q, R බල තුනක් ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA, AB පාද ඔස්ස් ක්‍රියාකරයි. බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හරහා යයි නම් $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = O$ බව පෙන්වන්න.



$B\hat{O}D=\hat{A}$, $C\hat{O}E=\hat{B}$, $A\hat{O}F=\hat{C}$

R යනු පරිවෘත්තයේ අරය නම් $R = OA = OB = OC$ වේ.

O ${\rm m}$ වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$P \times OD + Q \times OE + R \times OF = 0$

$P.\ OB\cos A + QOC.\ \cos B + R.\ OA\cos C = 0$

$OB = OC = OA$ නිසා

$P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$

3.6අභ්‍යාසය

1. ස්කන්ධය 3 kg දිග 1.5 m වන ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙළවරක සිට ස්කන්ධය 1, 2, 3, 4 *kg* වන 0.3 m, 0.6 m, 0.9 m, 1.2 m වන දුරින් පිළිවෙළින් 1, 2, 3, 4 kg ස්කන්ධ එල්ලා ඇත. මෙම ස්කන්ධ නිසා දණ්ඩ සමතුලිත වන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

2. දිග $3m$ සහ ස්කන්ධය 6 kg වන AB ඒකාකාර දණ්ඩක් A කෙළවර එක් ආධාරකයක් මත ද දණ්ඩේ තවත් ලක්ෂ්‍යයක් තවත් ආධාරයක් මත ගැටෙමින් තිරස්ව පවතී. ස්කන්ධය 1 *kg* වන බරක් B ලක්ෂ්‍යයේ ද තව ද 5 *kg* සහ 4 *kg* වන බර දෙකක් කෙළවර සිට පිළිවෙළින් 1 *m* හා 2 *m* දුරින් ද එල්ලා ඇත. A ආධාරක මත ප්‍රතික්‍රියාව 40 N නම් අනෙක් ආධාරකයේ පිහිටීම සොයන්න.

3. ස්කන්ධය 17 *kg* වන දිග 0.6 *m* වන ඒකාකාර දණ්ඩක් සිරස් තන්තු දෙකක් මගින් එල්ලා ඇත. ඒ තන්තුවක් දණ්ඩේ එක් කෙළවරක සිට 7.5 *cm* දුරකින් ද අනෙක් තන්තුව දණ්ඩේ අනෙක් කෙළවර සිට 10 *cm* දුරකින් ද එල්වා ඇත. එම තන්තුවලට දැරිය හැකි උපරිම ආතති පිළිවෙළින් 70 *Nm* 100 N නම් තන්තු නොගැලවෙන පරිදි 1.7 *kg* ස්කන්ධයක් එල්ලිය හැකි පිහිටීම සොයන්න.

4. ABCD යනු පැත්තක දිග a වන සමචතුරස්‍රයකි. 2, 3, 4 N බල පිළිවෙළින් AB, AD සහ AC ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. බලවල සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව DC රේඛාව හමු වන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

5. P, Q, R බල තුනක් පිළිවෙළින් A, B, C ශීර්ෂවල දී ක්‍රියාකරනුයේ එම ලක්ෂ්‍යයට ප්‍රතිවිරුද්ධ ව ඇති පාදයට ලම්භක වන පරිදි හා සමතුලිත වන පරිදි නම් $P : Q : R = a : b : c$ බව පෙන්වන්න.

6. P, Q, R බල BC, CA හා AB , පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. එම බලවල සම්ප්‍රයුක්තය ABC ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රය හරහා යයි නම්

   (i) $\dfrac{P}{\sin A} + \dfrac{Q}{\sin B} + \dfrac{R}{\sin C} = 0$ (ii) $\dfrac{P}{BC} + \dfrac{Q}{CA} + \dfrac{R}{AB} = 0$ බව පෙන්වන්න.

7. ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA, AB පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරන බල තුනක සම්ප්‍රයුක්තය එම ත්‍රිකෝණ පරිවෘත්තීය කේන්ද්‍රය හා ප්‍රලක්ෂ කේන්ද්‍රය හරහා යයි නම් බව පෙන්වන්න.

$$\frac{P}{(b^2-c^2)\cos A} = \frac{Q}{(c^2-a^2)\cos B} = \frac{R}{(a^2-b^2)\cos C}$$

8. ABC සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණයක BC, CA, AB පාද ඔස්සේ පිළිවෙළින් P, λP, λ^2P බල ක්‍රියා කරයි. පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය ප්‍රලම්බ කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරයි නම්

$\frac{1}{\cos A} + \frac{\lambda}{\cos B} = \frac{\lambda^2}{\cos(A+B)}$ බව පෙන්වන්න.

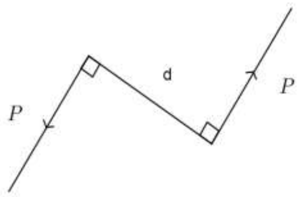
3.7 බල යුග්මය

අර්ථ දැක්වීම : විශාලත්වයෙන් සමාන දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ බල දෙකක එම බලවල ක්‍රියා රේඛා සමපාත නොවන විට එම බල යුගලය බලයුග්මයක් ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

බල යුග්මයක ක්‍රියාව නිසා භ්‍රමනයක් සිදුවේ.

බල යුග්මයක විශාලත්වය ඝූර්ණය මඟින් සෙවිය හැකිය.

බල දෙක ක්‍රියාකරන ක්‍රියා රේඛා අතර ලම්භ දුර යු‍ෙ ෘවේ.



බල යුග්මයේ විශාලත්වය = බලයක විශාලත්වය × බල දෙක අතර ලම්බ දුර

$M = P \times d$

$= Pd$ m

ප්‍රමේයය

බල යුග්මයක් සාධන බල දෙකක එම තලයේ කවර හෝ ලක්ෂ්‍යයක් වටා ඝූර්ණවල විජීය ඓක්‍යය නියත වන අතර එය යුග්මයේ ඝූර්ණයට සමාන වේ.

සාධනය

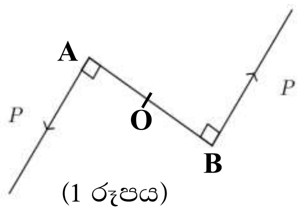
බල යුග්මයේ බලයන් Pට සමාන ලෙස ද O යනු එම තලයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් ද ලෙස ගනිමු. බලවල ක්‍රියා රේඛාවන්ට ලම්බකව Aහි සහ B හි දී හමු වන පරිදි OAB ලම්බකය අඳින්න.

Om වටා ඝූර්ණවල වීජීය ඓක්‍යය (1

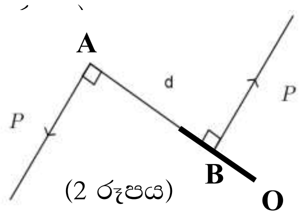
$= P \times OB + P \times OA$

$= P \times AB$ m

= බල යුග්මයේ ඝූර්ණය



(1 රූපය)



(2 රූපය)

Om වටා ඝූර්ණවල ඓක්‍යය (2 රූපය)

$= P \times OA - P \times OB$

$= P(OA - OB)$

$= P(AB)$ m

එම නිසා O ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම කුමක් වුවත් බල යුග්මයේ ඝූර්ණය එක ම අගයකි.

එනම් බල යුග්මයේ ඝූර්ණය ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුමෙන් ස්වායත්ත වේ.

ප්‍රමේයය

දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන බල යුග්ම දෙකක් බල යුග්ම දෙකේ ඝූර්ණවල වීජීය ඓක්‍යයට සමාන ඝූර්ණයක් ඇති තනි බල යුග්මයකට තුල්‍ය වේ.

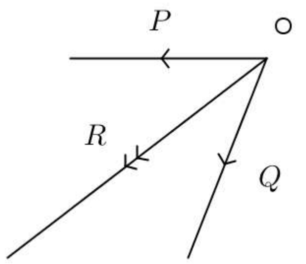
අවස්ථා දෙකක් සලකයි.

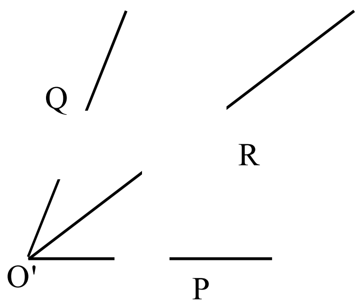
සාධනය

සිද්ධිය

(i) බලවල ක්‍රියා රේඛා සමාන්තර වන විට සහ (P, P), (Q, Q) යනු රූප සටහනට අනුව ක්‍රියා කරන යුග්මයන්හි බල නම් OABCD යනු ඒවායේ ක්‍රියා රේඛාවට ඇඳි ලම්බකය වේ. P හා Qහි සම්ප්‍රයුක්තය A හි දී ක්‍රියා කරන අතර F යනු $(P+Q)$ බලය වන අතර එය E හි දී ක්‍රියා කරයි. තව ද $AE : EF = Q : P$ සහ B හා D හි දී ක්‍රියාකරන P සහ Qහි සම්ප්‍රයුක්තය $(P+Q)$ වන අතර C හි දී ක්‍රියා කරයි. මෙහි $BC : CD = Q : P$ දැන් සමාන සමාන්තර ප්‍රතිවිරුද්ධ බල වන $(P+Q)$ මඟින් බල යුග්මයක් නිර්මාණය කරයි. මෙය බල යුග්ම දෙකෙහි සම්ප්‍රයුක්ත යුග්මය වේ.

(ii) බලවල ක්‍රියා රේඛා සමාන්තර නොවන විට, P, P, Q, Q යනු ඝූර්ණයෙහි අඩංගු බල නම් සහ එක P බලයක් සහ එක් Q බලයක් රූපයේ පරිදි O හි දී හමුවෙයි. Oහි දී ක්‍රියා කරන P සහ Q බලවල සම්ප්‍රයුක්ත වන R, Oහි දී ක්‍රියා කරන අතර අනෙක් P සහ Q බල O' හිදී ක්‍රියා කරන විට සම්ප්‍රයුක්තය වන R, O' මත ක්‍රියා කරයි. එම සම්ප්‍රයුක්ත බල සමාන හා සමාන්තර හා නමුත් විජාතීය බල මඟින් බල යුග්මයක් නිර්මාණය කරයි.





බල යුග්මයේ ඝූර්ණය = O' සහ O වටා R වල ඝූර්ණය

= O' වටා P වල සහ O' වටා Q වල ඝූර්ණවල ඓක්‍යය

= බල යුග්මවල ඝූර්ණවල ඓක්‍යය

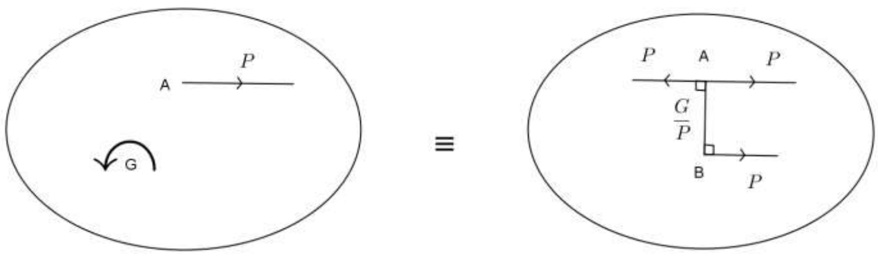
පහත අපෝහනයන් කළ හැකි ය

1. තලයක ක්‍රියා කරන සමාන හා ප්‍රතිවිරුද්ධ ඝූර්ණයන් සහිත බල යුග්ම දෙකක් එකිනෙක සංතුලනය කරයි.

2. සමාන ඝූර්ණ සහිත එක ම තලයේ කවර හෝ බල යුග්ම දෙකක් තුල්‍ය වේ.

ප්‍රමේයය

දෘඪ වස්තුවක් මත එක ම තලයේ ක්‍රියා කරන තනි බලයක් සහ බල යුග්මයක් වෙනත් ලක්ෂ්‍යයකදී ක්‍රියා කරන දී ඇති බලයට සමාන සහ ප්‍රතිවිරුද්ධ තනි බලයකට තුල්‍ය වේ.



සාධනය

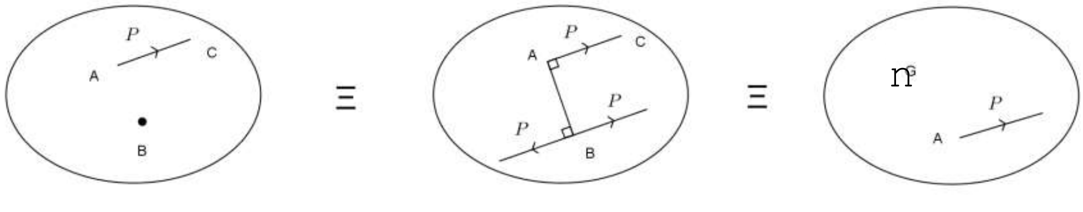
P යනු A හි දී ක්‍රියා කරන බලයක් ලෙස ද G යනු එම තලයේ ම ක්‍රියා කරන බල යුග්මයක් ද ලෙස ගනිමු.

A හි දී P බලය සහ $AB = \frac{G}{P}$ වන වෙනත් B ලක්ෂ්‍යයක දී ක්‍රියා කරන P බලය මඟින් G ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකි ය.

දැන් A හි දී සමාන හා ප්‍රතිවිරුද්ධ P බලයන් එකිනෙක සංතුලනය කිරීමෙන් සම්ප්‍රයුක්තය B හි දී ක්‍රියා කරන තනි P බලයක් වේ.

ප්‍රමේයය

දෘඪ වස්තුවක කවර හෝ ලක්ෂ්‍යක් මත ඇති කරන බලය වෙනත් කවර හෝ ලක්ෂ්‍යයක දී එක ම දිශාවකට ක්‍රියා කරන සමාන්තර බලයකට සහ බල යුග්මයකට තුල්‍ය වේ.



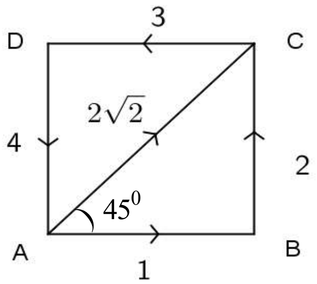
සාධනය

P යනු A හි දී AC දිගේ ක්‍රියා කරන දී ඇති බලය ලෙස ද B යනු වෙනත් කවර හෝ ලක්ෂ්‍යයක් ලෙස ද ගනිමු. B සිට ACට ඇති ලම්බ දුර d ලෙස ගනිමු. B හි දී සමාන සහ ප්‍රතිවිරුද්ධ සමාන්තර P බලයන් දක්වන්න. මේවායින් එක් බලයක් A හි දී ප්‍රතිවිරුද්ධ P සමඟ $G = P \times d$ බල යුග්මය සාදයි. B හි ඇති අනෙක් බලය තනි P බලයකි.

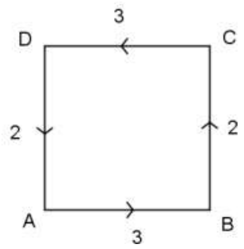
3.8 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණ 13

ABCD යනු පැත්තක දිග 1 m. වන සමචතුරස්‍රයකි. විශාලත්වයෙන් නිව්ටන් 1, 2, 3, 4, $2\sqrt{2}$ වන බලයන් AB, BC, CD, DA පාද සහ AC විකර්ණය ඔස්සේ දී ඇති පිළිවෙළට ක්‍රියා කරයි. බලපද්ධතිය බල යුග්මයක්ට තුල්‍ය බව පෙන්වා එහි ඝූර්ණය සොයන්න.



(1) රූපය



(2) රූපය

$2\sqrt{2}$ N බලය, AD සහ AB. දිගේ විභේදනය කරමු.

$\overline{AD}$ දිගේ සංරචක $= 2\sqrt{2}\cos 45$ $\quad$ $\overline{AB}$ දිගේ සංරචක $= 2\sqrt{2}\cos 45$

$= 2N$ $\quad$ $= 2N$

දැන් පද්ධතිය ඉහත 2 රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි පාද දිගේ ක්‍රියා කරන බලයන්ට සමාන වේ.

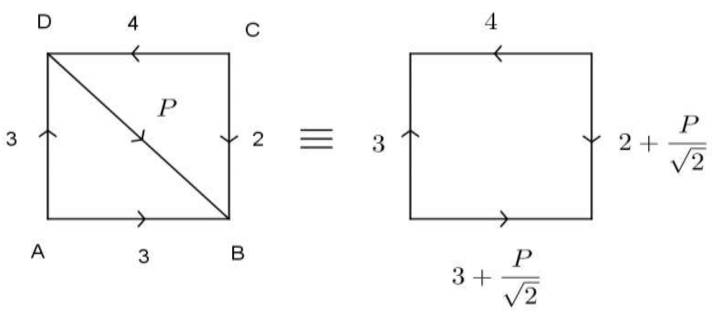
දැන් පද්ධතිය එකම අතට ක්‍රියා කරන බල යුග්ම දෙකකට තුල්‍ය වී ඇති නිසා, එම යුග්ම දෙක තනි යුග්මයකට ඌනනය කළ හැක.

සම්ප්‍රයුක්ත බල යුග්මයේ ඝූර්ණය $= 3 \times 1 + 2 \times 1$ (වාමාවර්තව)

$= 5$ Nm m

උදාහරණ 14

ABCD යනු විශාලත්වය නිව්ටන් 3, 2, 4, 3, P වන AB, CB, CD, AD සහ DB අකුරු මඟින් දැක්වෙන පිළිවෙළට ක්‍රියා කරන බලයන් ඇතුළත් සමචතුරස්‍රයකි. පද්ධතිය බල යුග්මයකට ඌනනය වේ නම් Pහි අගය සොයන්න.



P N බලය AB සහ CB දිගේ විභේදයෙන් ලැබෙන සංරචකයේ විශාලත්ව එක හා සමාන වන අතර එය P cos45 = $\frac{P}{\sqrt{2}}$ N.

බල යුග්මයට ඌනනය කිරීමට $3 + \frac{P}{\sqrt{2}} = 4$ සහ $2 + \frac{P}{\sqrt{2}} = 3$ විය යුතුයි.

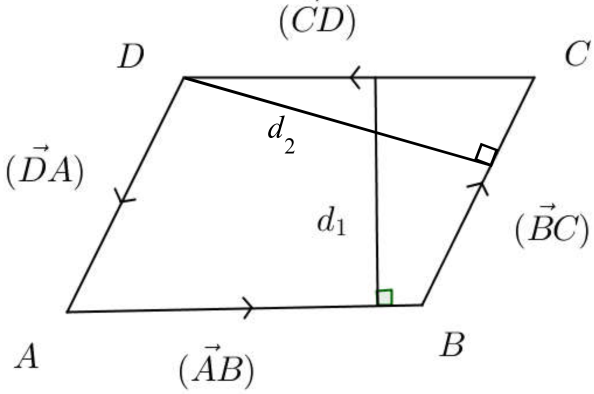
$\frac{P}{\sqrt{2}} = 1$ සහ $\frac{P}{\sqrt{2}} = 1$

$P = \sqrt{2}$ සහ $P = \sqrt{2}$

$\therefore\ P = \sqrt{2}$

උදාහරණ 15

ABCD යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ මඟින් නිරූපණය වන බලයන් පිළිවෙළින් එම පැති දිගේ ක්‍රියා කරයි. එම බලයන් සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයකට සමාන ඝූර්ණයකින් යුක්ත බල යුග්මයකට සමාන බව පෙන්වන්න. ජමහි $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ හා $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DC}|$ වේ.



$\overrightarrow{AB}$ සහ $\overrightarrow{CD}$ බල විශාලත්වයෙන් සමාන ප්‍රතිවිරුද්ධ සහ සමාන්තර බල නිසා $AB \times d_1$ බල යුග්මයක් වේ. මෙහි AB සහ CD අතර දුර ලම්භ දුර d_1 වේ.

$\overrightarrow{BC}$ සහ $\overrightarrow{DA}$ විශාලත්වයෙන් සමාන ප්‍රතිවිරුද්ධ සහ සමාන්තර බල නිසා $BC \times d_2$ බල යුග්මයක් සාදයි.

තව ද බල යුග්ම දෙක ම එක ම අතට ක්‍රියා කරන බැවින් සම්ප්‍රයුක්ත බල යුග්මයේ ඝූර්ණය

$AB \times d_1 + BC \times d_2$ වේ. (මෙහි d_2 යනු AB සහ BC අතර ලම්භ දුර වේ)

එහෙත් $AB \times d_1 = BC \times d_2 =$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

එබැවින් බල යුග්මයේ ඝූර්ණය සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයකට සමාන වේ.

3.9 අභ්‍යාසය

1. ABCD යනු පැත්තක දිග $2\,m$. වන සමචතුරස්‍රයකි. a, b, c සහ d බලයන් AB, BC, CD සහ DA දිගේ පිළිවෙළින් ද $p\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$ බලයන් AC සහ BD දිගේ පිළිවෙළින් ද ක්‍රියා කරයි. $p+q=c-a$ සහ $p-q=d-b$ නම් බලයන් හි ඝූර්ණය $a+b+c+d$. වන බල යුග්මයකට තුල්‍ය බව පෙන්වන්න.

2. P සහ Q යනු සමාන්තර එක ම දිශාවකට ක්‍රියා නොකරන බල දෙකකි. විශාලත්වය F වන බල යුග්මයක් එම තලය මත යෙදූ විට P සහ Q බල වල සම්ප්‍රයුක්තය බලය $\dfrac{\mathrm{F}a}{(\mathrm{P}+\mathrm{Q})}$ දුරකින් විස්ථාපනය වන බව පෙන්වන්න. මෙහි a යනු P හා Q බලවල ක්‍රියාරේඛා අතර ලම්බ දුර වේ.

3. ABC ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂවල දී පරිවෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක දිගේ ABC අතට A, B හා C වලදී ක්‍රියාකරන P, Q සහ R බල තුනක් බල යුග්මයකට තුල්‍ය වේ.
$\mathrm{P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C}$ බව පෙන්වන්න.

4. ABCD සමචතුරස්‍රයකි. CD සහ BC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් D සහ E වේ. P, Q, R බල පිළිවෙලින් AD, DE සහ EA අක්ෂර මඟින් දැක්වෙන දිශාවන් ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය බල යුග්මයකට තුල්‍ය වේ නම් $\mathrm{P : Q : R} = \sqrt{5} : \sqrt{2} : \sqrt{5}$ බව පෙන්වන්න.

5. පැත්තක දිග $0.6\,m$ වන ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක AB, BC, CA පාද දිගේ නිව්ටන් 4, 3, 3 බල පිළිවෙළින් ක්‍රියා කරයි. P N වන තවත් බලයක් පද්ධතිය බල යුග්මයකට ඌනනය වන පරිදි C හි දී ක්‍රියා කරයි. Pහි විශාලත්වය සහ දිශාව සොයන්න.
බල යුග්මයේ ඝූර්ණය ද සොයන්න.

6. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන බල තුනක විශාලත්වය දිශාව සහ ක්‍රියා රේඛාව ත්‍රිකෝණයක පිළිවෙළින් ගත් පාද තුනක් ඔස්සේ නිරූපණය කරයි නම් ඒවා ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් වන තනි බල යුග්මයකට තුල්‍ය බව පෙන්වන්න.

7. P, P, Q, Q බල හතරක් ABCD රොම්බසයක AB, BC, CD, DA පාද දිගේ ක්‍රියා කරයි. රොම්බසයේ කේන්ද්‍රය O වටා ඒවායේ ඝූර්ණවල එකතුව සොයන්න. ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්තය
O සිට $\dfrac{BD}{2}\left(\dfrac{P+Q}{P-Q}\right)$ දුරකින් බව ඔප්පු කරන්න.
P = Q වන අවස්ථාව සාකච්ඡා කරන්න.

4.0 දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල

4.1 ඒකතල බලවල සම්ප්‍රයුක්තය

දෙවන පරිච්ඡේදයේ දී ලක්ෂ්‍යයක් මත ක්‍රියා කරන බල පිළිබඳ අධ්‍යයනය කරන ලදී. මෙහි දී සියලු ම බල ඒක ලක්ෂ්‍ය නොවන අවස්ථා ගැන සාකච්ඡා කෙරේ.

ඒකතල බල පද්ධතියක සම්ප්‍රයුක්තය

මෙහි දී විශාලත්වය හා ක්‍රියා රේඛාව දන්නා බල සමූහයක සම්ප්‍රයුක්තය සෙවීම සිදු කෙරේ.

සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය

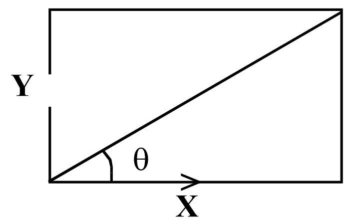
බල එකිනෙකට ලම්බක දිශා දෙකකට විභේදනය කරනු ලැබේ. මෙම සංරචක වෙන වෙන ම එකතු කර ඒවා **X** හා **Y** ලෙස අංකනය කරනු ලැබේ. සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $R^2 = X^2 + Y^2$ මඟින් ලබා ගත හැකිය.

සම්ප්‍රයුක්තයේ දිශාව

සම්ප්‍රයුක්තය X සමඟ සාධන දිශාව θ නම්

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$



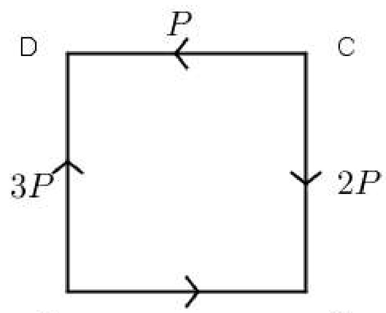
සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව ක්‍රියා කරන ලක්ෂ්‍ය සඳහා
දෙන ලද රේඛාවක පිහිටි O ලක්ෂ්‍යය වටා ඝූර්ණ ගැනිමෙන් සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව දෙන ලද රේඛාව කපන ලක්ෂ්‍යය සොයාගත හැකි ය.

උදාහරණ 1

පැත්තක දිග **2*a*.** වන ABCD සමචතුරස්‍රයක පාද ඔස්සේ නිවිටන් 3P, 2P, P, 3P බල පිළිවෙලින් AB, CB, CD, සහ AD ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි නම්

(i) සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය හා දිශාව ද

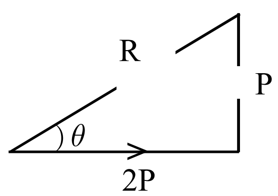
(ii) සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව ද සොයන්න.



AB දිශාවට විභේදනයෙන් $\rightarrow X = 3P - P$
$= 2P$

AD දිශාවට විභේදනයෙන් $\uparrow Y = 3P - 2P$
$= P$

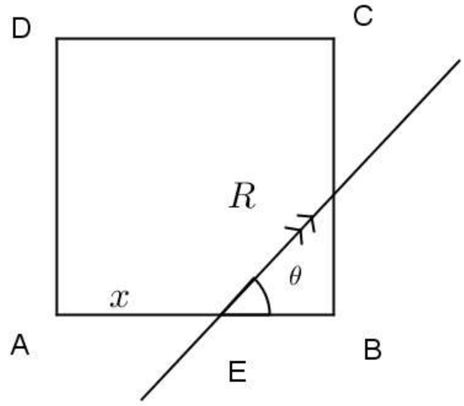
$$R^2 = X^2 + Y^2$$
$$= (2P)^2 + P^2 = 5P^2$$
$$R = P\sqrt{5}\ N$$
$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{P}{2P} = \frac{1}{2}$$



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $P\sqrt{5}$ N ද AB සමඟ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ සෑදයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලය AB කපන ලක්ෂ්‍යය E නම් සහ AE = x නම්

E වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්



$$\begin{aligned} 3Px + 2P(2a - x) - P \times 2a &= 0 \\ 3x - 2x &= 2a - 4a \\ x &= -2a \end{aligned}$$

හෝ

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\begin{aligned} R \times x\sin\theta &= P \times 2a - 2P \times 2a \\ P\sqrt{5} \times x \times \frac{1}{\sqrt{5}} &= -2Pa \\ x &= -2a \end{aligned}$$

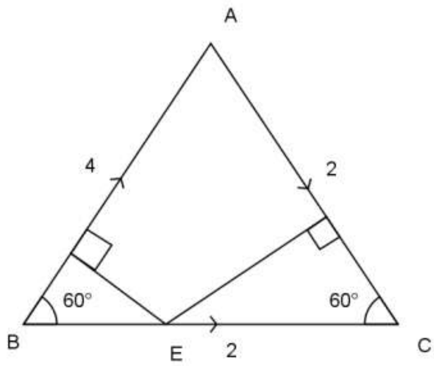
සම්ප්‍රයුක්තය BA රේඛාව, A සිට 2a දුරක දී කපයි.

උදාහරණ 2

ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක පාදයක දිග 2a.වේ. 4N, 2N, 2N බල පිළිවෙළින් BA, AC, BC ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය සොයන්න. තව ද සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව B ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{2a}{3}$ දුරක දී BC රේඛාව කපන බව පෙන්වන්න.

BC ට සමාන්තර ව විභේදනයෙන්

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad X &= 2 + 2\cos 60 - 4\cos 60 \\ &= 2 + 1 - 2 = 1 \end{aligned}$$



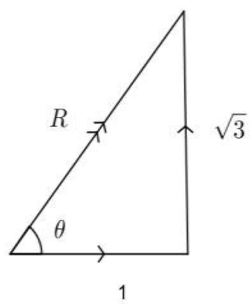
BC ට ලම්බක ව විභේදනයෙන්

$$\begin{aligned} \uparrow \quad Y &= 4\sin 60 - 2\sin 60 \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

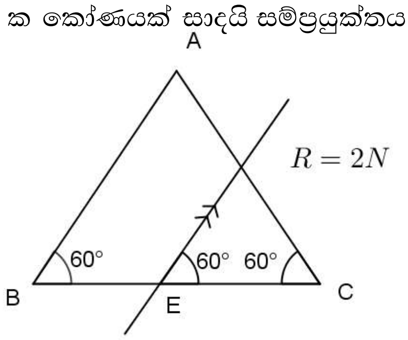
$$\begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 3 = 4 \\ R &= 2N \end{aligned}$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$$



සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය 2N වන අතර එය BC සමඟ $60°$ ක කෝණයක් සාදයි සම්ප්‍රයුක්තය BC රේඛාව කපන ලක්ෂ්‍යය E නම්



E වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$4 \times x\sin 60 - 2 \times (2a - x)\sin 60° = 0$

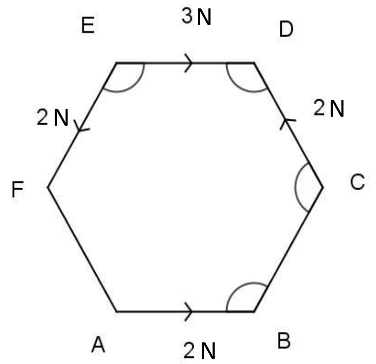
$4x - 4a + 2x = 0$

$6x = 4a$

$x = \frac{2}{3}a$

උදාහරණ 3

ABCDEF යනු පැත්තක දිග a වන සවිධි ෂඩස්‍රයකි. 2N, 2N, 3N, 2N බල පිළිවෙළින් AB, CD, ED, EF ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්තය විශාලත්වය සොයන්න. තව ද එය A ලක්ෂ්‍යයේ දී AB ඔස්සේ ක්‍රියා කරන බව ද පෙන්වන්න.



AB සහ AE එකිනෙකට ලම්බක නිසා

ABට සමාන්තර ව බල විභේදනයෙන්

$$\rightarrow X = 2 + 3 - 2\cos 60 - 2\cos 60$$
$$= 3N$$

AEට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්

$$Y = 2\sin 60 - 2\sin 60$$
$$= 0$$

$R = 3N$ AB ට සමාන්තර වේ.

Am වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$2 \times 2a\sin 60 - 3 \times 4a\cos 30 + 2 \times 4a\cos 30 = 0$$

එය A හරහා යමින් AB ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

ඒකතල බල පද්ධතියක්

ඒකතල බල පද්ධතියක් එම බල පද්ධතිය ක්‍රියාකරන තලයේ පිහිටි යම් මූල ලක්ෂ්‍යයක දී ක්‍රියා කරන තනි බලයකට සහ බල යුග්මයකට තුල්‍ය වේ.

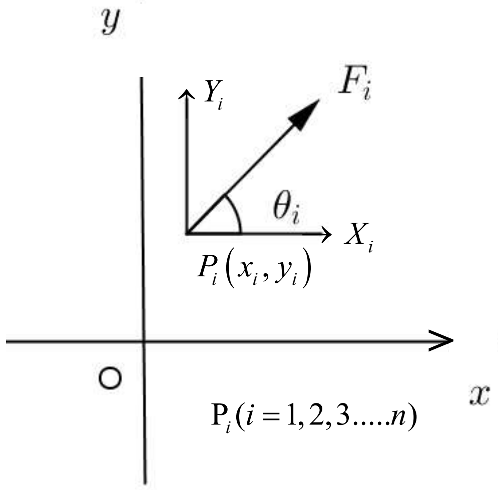
$F_i (i = 1, 2, ... n)$ බල $P_i (\boldsymbol{i} = 1, ... n)$ ලක්ෂ්‍යවල දි ක්‍රියා කරන්නේ යයි ද එම බල ක්‍රියා කරන තලයේ පිහිටි මූල ලක්ෂ්‍යය O නම් O මූල ලක්ෂ්‍යය ලෙස ගත් විට Ox, Oy කණ්ඩාංක අක්ෂ පද්ධතියට අනුව $P_i \equiv (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, ... n)$ ද ලෙස ගනිමු.

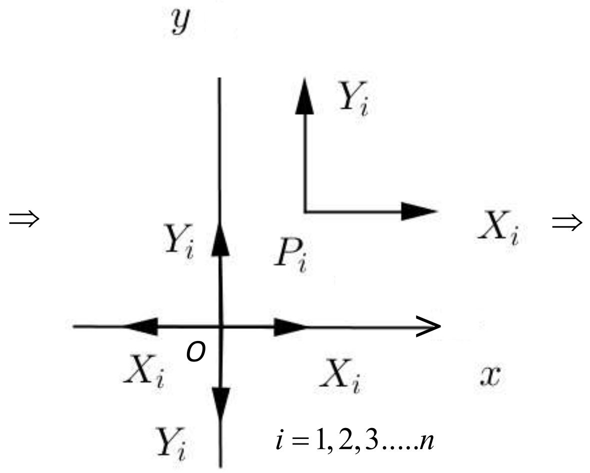
F_i *(i=1,2,3,....n)* බල Ox සමඟ θ_i කෝණයක් සාදයි නම්

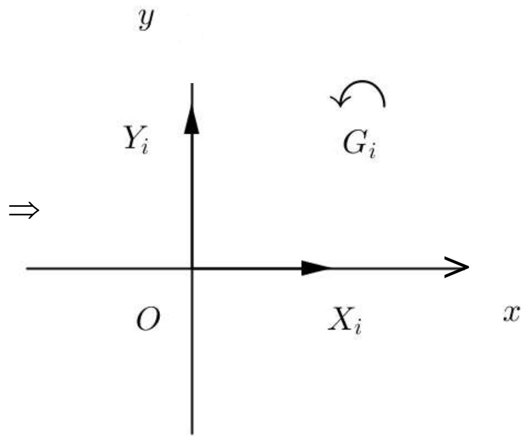
F_i බලය Ox හා Oy ඔස්සේ විභේදනයෙන්

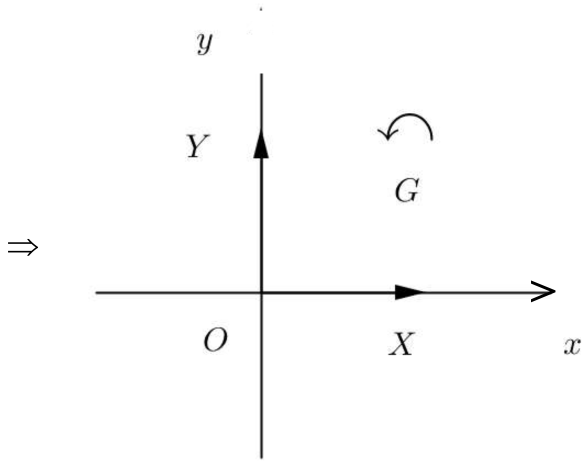
$X_i = F_i \cos\theta_i$, $Y_i = F_i \sin\theta_i$ $(\boldsymbol{i} = 1, 2, ...n)$

O ලක්ෂ්‍යයේ දී X_i, Y_i බල සමඟ දිශාවෙන් විරුද්ධ බල එකතු කිරීමෙන් බල පද්ධතියට බලපෑමක් ඇති නොවේ.

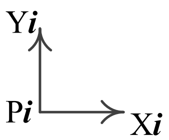






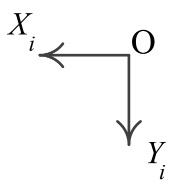


P_i ලක්ෂයේ දී

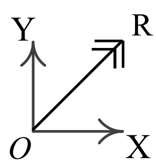


සහ

O ලක්ෂ්‍යයේ දී



මඟින් O ලක්ෂ්‍යයේ දී G_i බල යුග්මයක් හා

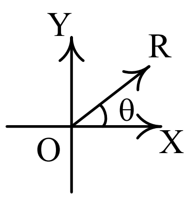


R තනි බලයක් සාදයි

$$G_i \ \mathrm{m} = Y_i x_i - X_i y_i$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$ සහ

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$ ලෙස ගනිමු.



එනම් $R^2 = X^2 + Y^2$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

සහ $G = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i - X_i y_i$

සටහන : G යනු O වටා වාමාවර්ථව සියලු බලවල ඝූර්ණවල වීජ ඓක්‍යය යි. එය O ලක්‍ෂ්‍යයේ පිහිටීම මත රඳා පවතී.

ඒකතල බල පද්ධතියක සමතුලිත අවස්ථා

බල පද්ධතියක් ඕනෑ ම O ලක්ෂ්‍යයක දී (මූලය) ක්‍රියා කරන තනි R බලයකට සහ එම තලයේ ක්‍රියා කරන G යුග්මයකට ඌනනය කළ හැකි ය.

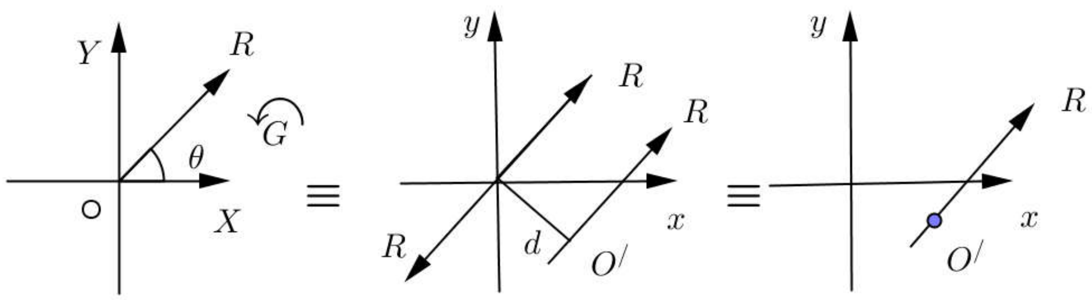
i. $R = 0$ සහ $G = 0$ නම් බල පද්ධතිය සමතුලිත වේ.

ii. $R \neq 0$, සහ $G = 0$ නම් පද්ධතිය O ලක්ෂ්‍යයේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට ඌනනය වේ.

iii. $R = 0$ සහ $G \neq 0$ නම් බල පද්ධතිය G බල යුග්මයකට ඌනනය වේ.

iv. $R \neq 0$ සහ $G \neq 0$ නම් බල පද්ධතිය සමතුලිත නොවේ බල පද්ධතිය O'නම් ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන R නම් තනි බලයකට ඌනනය වේ.

පහත නිරූපණය කරන පරිදි $OO' = \frac{G}{R}$ වේ.



සාධනය :

G බල යුග්මය විශාලත්වයෙන් සමාන දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ R සහ R බල දෙකක් ලෙස O සහ O' ලක්‍ෂ්‍යවල දි නිරූපණය කරනු ලැබේ. බල දෙකේ ක්‍රියා රේඛා අතර දුර $d = \frac{G}{R}$ වේ.

විශාලත්වයෙන් සමාන දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ බල තුලනය කරයි. එම නිසා තනි R බලයක් O' හි දී ක්‍රියා කරයි.

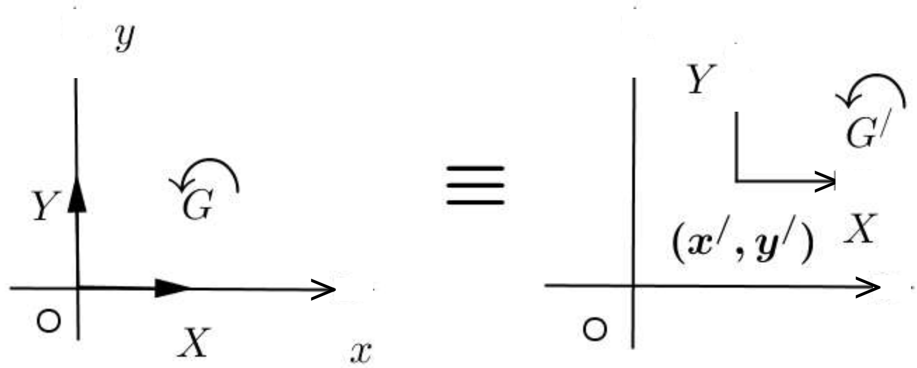
ඒකතල බල පද්ධතියක සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

බල පද්ධතියක් සමතුලිතතාව නැත්නම් එම බල පද්ධතිය ඕනෑම (x', y') ලක්ෂ්‍යයක ම ක්‍රියා කරන R තනි බලයකට සහ G' බල යුග්මයකට තුල්‍ය වේ.

එනම් $R^2 = X^2 + Y^2$ සහ $G' = G + Xy' - Yx'$

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යක ඝූර්ණය ශූන්‍ය වේ. සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යක් (x, y) නම් $G + Xy - Yx = 0;$

මෙය සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණයයි.



O වටා ඝූර්ණය =

$$G = Yx' - Xy' + G'$$

එම නිසා $G' = G + Xy' - Yx'$

සම්ප්‍රයුක්තය (x', y') හරහා යයි නම් $G' = 0$

$$O = G + Xy' - Yx'$$

ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$$O = G + Xy - Yx$$

8.2 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණ 4

2, 4, 1, 6 නිව්ටන් බල සමචතුරස්‍රයක පාද පිළිවෙළින් AB, CB, CD, AD ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වයේ දිශාව සොයන්න. පාදයක දිග a වේ.

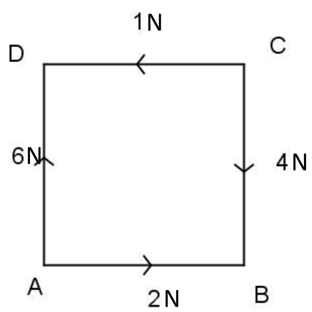
AB සහ AD රේඛා ඛණ්ඩාංක අක්ෂ ලෙස ගත් විට සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $2x - y + 3a = 0$ බව පෙන්වන්න.

ABට සමාන්තර ව බල විභේදනයෙන්

$\rightarrow X = 2 - 1 = 1$

AD ට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්

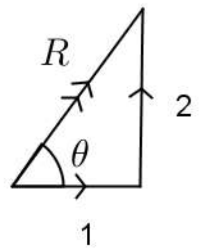
$\uparrow Y = 6 - 4 = 2$



$R^2 = X^2 + Y^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

$R = \sqrt{5}$ N

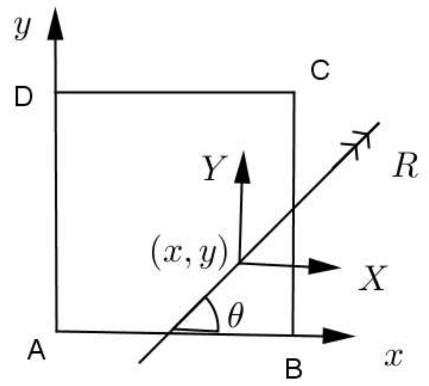
$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$
$$= 2$$
$$\theta = \tan^{-1}(2)$$



සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $\sqrt{5}$ N ද AB සමඟ $\tan^{-1}(2)$ කෝණයක් සාදයි.

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$G\circlearrowleft = 1 \times a - 4 \times a$$
$$= -3a \text{ N}m$$



ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$$G + Xy - Yx = 0$$
$$-3a + y - 2x = 0$$
$$2x - y + 3a = 0$$

හෝ

A වටා සම්ප්‍රයුක්තයේ ඝූර්ණය

= A වටා බලවල ඝූර්ණයන්ගේ වීජ ඓක්‍යය

$$G = Yx - Xy$$
$$-3a = 2x - 1y$$
$$2x - y + 3a = 0$$

උදාහරණ 5

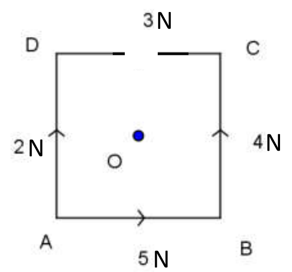
ABCD යනු පැත්තක දිග a වන සමචතුරස්‍රයකි. නිව්ටන් 5, 4, 3, 2 බල පිළිවෙළින් AB, BC, CD, AD ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. බල පද්ධතිය

i. A ලක්ෂ්‍යයේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට හා බල යුග්මයකට

ii. O ලක්ෂ්‍යයේ ක්‍රියා කරන බලයකට හා බල යුග්මයකට

iii. AB හා AD ඛණ්ඩාංක අක්ෂ ලෙස ගෙන ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

AB ට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්

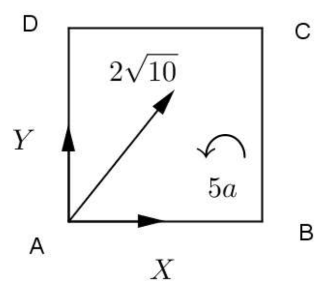


$$\rightarrow X = 5 - 3$$
$$= 2\text{N}$$

AB ට ලම්බක ව බල විභේදනයෙන්

$$\uparrow Y = 4 + 2$$
$$= 6\text{N}$$

$$R^2 = X^2 + Y^2$$
$$= 40$$
$$R = 2\sqrt{10}$$



A$\circlearrowleft$ වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$G = 4 \times a + 3 \times a$$
$$= 7a \text{ Nm}$$

A ලක්ෂ්‍යයේ ක්‍රියා කරන $2\sqrt{10}$ N තනි බලයකට සහ $7a$ Nm බල යුග්මයකට තුල්‍ය වේ.
O ලක්ෂ්‍යයේ දී ඝූර්ණයය

$$G = 5 \times \frac{a}{2} + 4 \times \frac{a}{2} + 3 \times \frac{a}{2} - 2 \times \frac{a}{2}$$
$$= 5a \text{ N}m$$

කේන්ද්‍රයේ දී $2\sqrt{10}$ N බලයට සහ $5a$ Nm බල යුග්මයකට තුල්‍ය වේ.
ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$$G + X.y - Y.x = 0$$
$$5a + 2y - 4x = 0$$
$$4x - 2y - 5a = 0$$

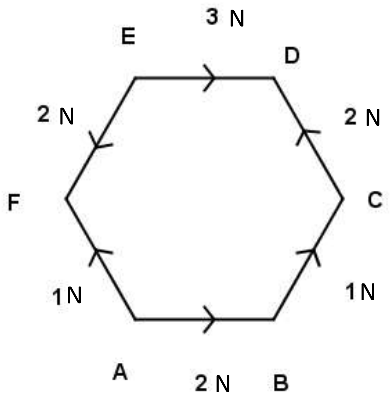
උදාහරණය 6

පැත්තක දිග $2a$ වන ABCDEF සවිධි ෂඩස්‍රයක නිව්ටන් 2, 1, 2, 3, 2, 1 N බල පිළිවෙළින් AB, BC, CD, ED, EF, AF පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

i. බල පද්ධතිය AC ඔස්සේ ක්‍රියා කරන $2\sqrt{3}$N තනි බලයකට හා බල යුග්මයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

ii. බල පද්ධතිය තනි බලයකට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණ සොයන්න.

iii. ක්‍රියා රේඛාව දික් කරන ලද FA රේඛාව K හි දී කපයි නම් AK ඈර සොයන්න.



$\rightarrow$ X = 2 + 3 + 1cos60 - 2cos60 - 2cos60 - 1cos60
= 5 - 2 = 3 N

$\uparrow$ Y = 1sin60 + 1 sin60 + 2sin60 - 2sin60
= $\sqrt{3}$N

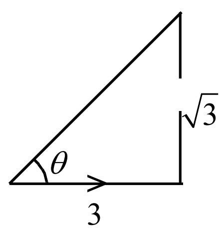
$R^2 = X^2 + Y^2$
= 12

R = $2\sqrt{3}$N

$$\tan\theta = \frac{X}{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\theta = 30°$

සම්ප්‍රයුක්තය ACට සමාන්තර වේ.



A m වටා ඝූර්ණවල එකතුව

$G = 1 \times 2a\sin60 + 2 \times 4a\cos 30 + 2 \times 2a\sin60 - 3 \times 4a\cos30$

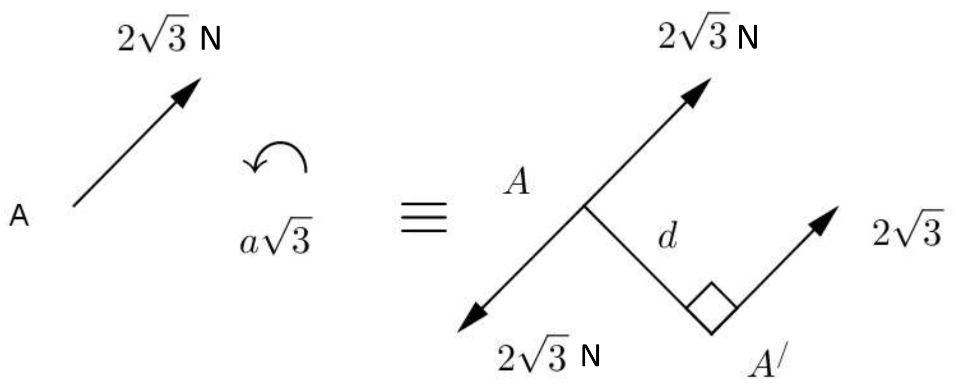
$= a\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\,a + 2\sqrt{3}\,a - 6\sqrt{3}\,a$

$= a\sqrt{3}$ Nm

$\therefore$ පද්ධතිය AC ඔස්සේ

$2\sqrt{3}$ N බලයට හා $a\sqrt{3}$ N වූ යුග්මයකට තුල්‍ය වේ.

යුග්මයේ ඝූර්ණය $a\sqrt{3}$ Nm



ඉහත පෙන්වා ඇති පරදි $2\sqrt{3}$ N බලය සමාන ප්‍රතිවිරුද්ධ බල දෙකකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකි ය. $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a}{2}m$

A ලක්ෂ්‍යයේ ඇති බල එකිනෙකට තුලනය කරයි.

එම නිසා A' හි ක්‍රියා කරන $2\sqrt{3}$ N තනි බලයකට ඌනනය වේ.

ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$$G + Xy - Yx = 0$$

$$a\sqrt{3} + 3y - \sqrt{3}x = 0$$

$$x - \sqrt{3}y - a = 0$$

ක්‍රියා රේඛාව AB රේඛාව H හි දී කපයි. FA රේඛාව K තෙක් දික් කරනු ලැබේ.

$H = (x_1, 0)$ $x - \sqrt{3}\,y - a = 0$

$y = 0$ $x_1 = a$

$E = (a, 0)$

$$\sin60^0 = \frac{AK}{AE}$$

$$AK = AE\sin60$$

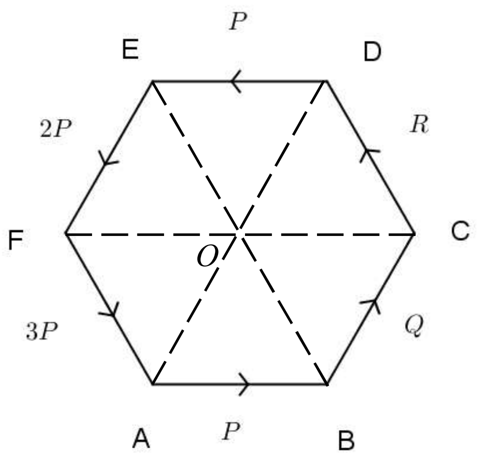
$$= \frac{a\sqrt{3}}{2}m$$

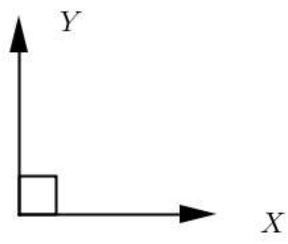
උදාහරණය 7

පැත්තක දිග $2a$ වන ABCDEF සවිධි ෂඩස්‍රයක AB, BC, CD, DE, EF, FA පාද ඔස්සේ P, Q, R, P, 2P, 3P N බල පිළිවෙළින් ක්‍රියා කරයි.

i. පද්ධතිය යුග්මයකට සමාන නම් Q = 2P සහ R = 3P බව පෙන්වා යුග්මයේ ඝූර්ණය ද සොයන්න.

ii. පද්ධතිය AD ඔස්සේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට සමාන නම් Q සහ R බල P ඇසුරින් ප්‍රකාශ





පද්ධතියේ බල යුග්මයකට තුල්‍ය නිසා

X = 0 සහ Y = 0

$$\rightarrow \; X = Q\cos60 - R\cos60 - 2P\cos60 + 3P\cos60 = \frac{Q-R+P}{2}$$

$$X = 0; \quad Q - R + P = 0$$

$$R - Q = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\uparrow \; Y = Q\sin60 + R\sin60 - 2P\sin60 - 3P\sin60 = (Q+R-5P)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Y = 0; \quad Q + R = 5P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1), (2) $\quad R = 3P$ සහ $Q = 2P$

යුග්මයේ ඝූර්ණය = Om වටා ඝූර්ණවල එකතුව

$$= (P + Q + R + P + 2P + 3P) \times a\sqrt{3}$$

$$= 12\sqrt{3}\,aP \text{ N}m$$

(ii) $\quad X = \dfrac{Q-R+P}{2}$

$$Y = (Q + R - 5P)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

සම්ප්‍රයුක්තය AD ට සමාන්තර නිසා

$$\theta = 60°$$

$$\tan\theta = \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}(Q+R-5P)}{Q-R+P}$$

$$Q - R + P = Q + R - 5P$$

$$R = 3P$$

AD ඔස්සේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට තුල්‍ය වේ.
Om වටා ඝූර්ණවල එකතුව ශූන්‍යය වේ.

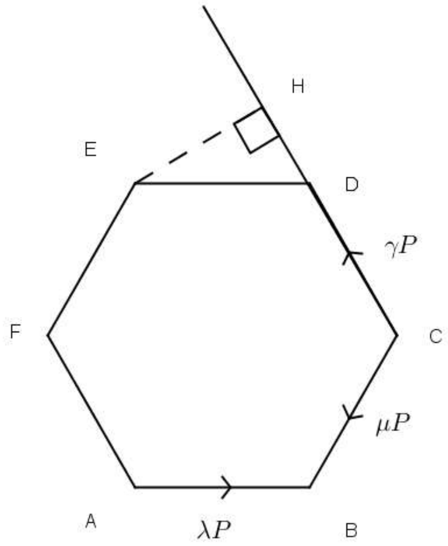
$$\begin{aligned}(7P + Q + R)a\sqrt{3} &= 0\\ 10P + Q &= 0\\ Q &= -10P\end{aligned}$$

උදාහරණය 8

ABCDEF යනු පැත්තක දිග a වන සවිධි ෂඩාස්‍රයකි. විශාලත්ව $\lambda P, \mu P, \gamma P$ බල පිළිවෙළින් AB, CB, CD ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. D, E, F ශීර්ෂ හරහා ඝූර්ණ පිළිවෙළින් $2\sqrt{3}$ Pa, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ Pa, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Pa වන අතර එම ඝූර්ණවල අත ඔරලෝසු කටු කැරකෙන දිශාවට විරුද්ධ ව ක්‍රියා කරයි.

i. λ, μ, γ අගයන් සොයන්න.

ii. සම්ප්‍රයුක්ත A හරහා EC ට සමාන්තරව ක්‍රියා කරන $\sqrt{3}$ P N තනි බලයක් බව පෙන්වන්න.



Dm වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\begin{aligned}\lambda P \times 2a\cos30 - \mu P \times a\sin60 &= 2\sqrt{3}\,aP\\ 2\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu\frac{\sqrt{3}}{2} &= 2\sqrt{3}\\ 2\lambda - \mu &= 4 \qquad \text{.........................(1)}\end{aligned}$$

Em වටා ඝූර්ණවල එකතුව

$$\lambda P \times 2a\cos30 - \mu P \times 2a\cos30 + \gamma P \times a\sin60 = \frac{3\sqrt{3}}{2}Pa$$

$$\begin{aligned}aP\frac{\sqrt{3}}{2}[2\lambda - 2\mu + \gamma] &= 3a\frac{P\sqrt{3}}{2}\\ 2\lambda - 2\mu + \gamma &= 3 \qquad \text{...........................(2)}\end{aligned}$$

Fm වටා සූර්ණවල එකතුව $\lambda P \times a \sin 60 - \mu p \times 2a \cos 30 + \gamma p.2a \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} Pa$

$$\lambda Pa \frac{\sqrt{3}}{2} - \mu P2a \frac{\sqrt{3}}{2} + \gamma P2a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}Pa}{2}$$

$$ap \frac{\sqrt{3}}{2} [\lambda - 2\mu + 2\gamma] = a \frac{P\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda - 2\mu + 2\gamma = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

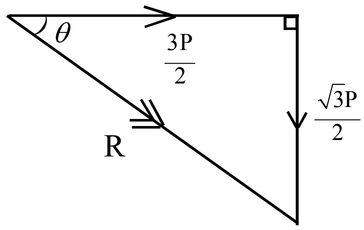
(1), (2), (3) $\lambda = 3, \mu = 2, \gamma = 1$

$$\rightarrow X = \lambda P - \mu P\cos 60 - \gamma P\cos 60$$

$$= 3P - 2\frac{P}{2} - \frac{P}{2} = \frac{3P}{2}$$

$$\downarrow Y = \mu P\sin 60 - \gamma P\sin 60$$

$$= 2P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}P}{2}$$



$$R^2 = \left(3\frac{P}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}P}{2}\right)^2 = 3P^2$$

$$R = \sqrt{3}P \text{ N}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{\frac{3P}{2}}}{\frac{3P}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \theta = 30°$$

A m වටා සූර්ණය $= P \times 2a\cos 30 - 2P \times a \sin 60$

$= 0$

සම්ප්‍රයුක්තය ECට සමාන්තර A හරහා ගමන් කරන $P\sqrt{3}$ N වන තනි බලයකි.

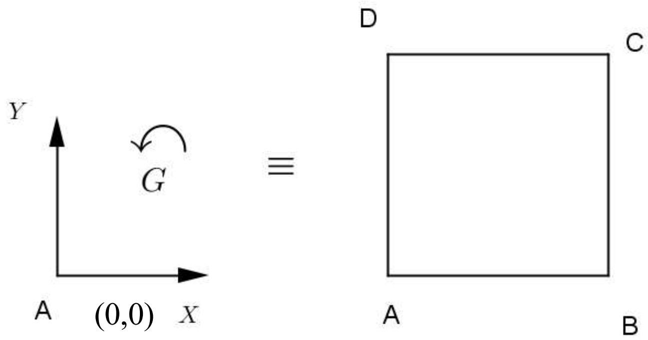
උදාහරණය 9

ABCD යනු සෘජුකෝණාස්‍රයකි. එහි $AB = 2a$ සහ $AD = a$ වේ. A, B හා C ලක්ෂ්‍ය වටා පද්ධතියේ වාමාර්ථ සූර්නයන් පිළිවෙළින් $M_1, M_2, -M_3$ වේ.

i. D වටා පද්ධතියේ සූර්ණය සොයන්න.

ii. සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

iii. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාව BC රේඛාවට ලම්බක නම් $M_1 = 5M_2 + 4M_3$ බව පෙන්වන්න.



ඉහත පෙන්වා ඇති පරිදි A ලක්ෂ්‍යයට අක්ෂ මූලය ලෙස ද, AB පාදය x අක්ෂය හා AD පාදය y අක්ෂය ලෙස ද තෝරාගත් විට තලයේ පිහිටි ඕනෑම (x, y) ලක්ෂ්‍යයක් වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණය

$$G' = G + Xy - Yx$$

එවිට $A = (0, 0)$, $B = (2a, 0)$, $C = (2a, a)$, $D = (0, a)$ වේ.

A m වටා ඝූර්ණය ගත් විට $M_1 = G + X.0 - Y.0$

$$G = M_1$$

B m වටා ඝූර්ණය ගත් විට $M_2 = M_1 + X(0) - Y(2a)$

$$Y = \frac{M_1 - M_2}{2a}$$

Cm වටා ඝූර්ණය ගත් විට $-M_3 = M_1 + X(a) - Y(2a)$

$$-M_3 = M_1 + Xa - (M_1 - M_2)$$

$$X = -\frac{(M_2 + M_3)}{a}$$

D හි ඝූර්ණය $D = (0, a)$

$$G' = M_1 - \frac{(M_2 + M_3)}{a} \times a - \left(\frac{M_1 - M_2}{2a}\right) \times 0$$

$$= (M_1 - M_2 - M_3)$$

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$= \left(\frac{M_2 + M_3}{a}\right)^2 + \left(\frac{M_1 + M_2}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{4(M_2 + M_3)^2 + (M_1 - M_2)^2}{4a^2}$$

$$R = \frac{1}{2a}\left[(M_2 + M_3)^2 + (M_1 - M_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

$$= \left(\frac{M_1 - M_2}{2a}\right) \times \left(\frac{-a}{M_2 + M_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_3}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{M_2 - M_1}{2(M_2 + M_3)}\right]$$

රේඛාවේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{(M_2 - M_1)}{2(M_2 + M_3)}$

AC රේඛාවේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{1}{2}$

$$\frac{(M_2 - M_1)}{2(M_2 + M_3)} \times \frac{1}{2} = -1$$

$$M_2 - M_1 = -4M_2 - 4M_3$$

$$5M_2 + 4M_3 = M_1$$

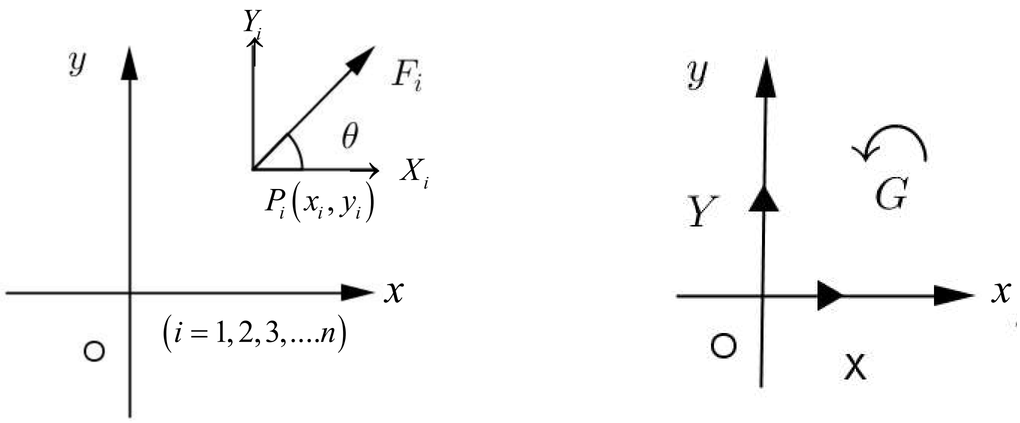
උදාහරණය 10

Ox, Oy සෘජුකෝණාස්‍ර අක්ෂ පද්ධතියට සාපේක්ෂ ව $F_i\ (\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots\ n)$ බල $P_i\ (x_i, y_i)$ ලක්ෂ්‍යයේ ක්‍රියා කරයි. එම සෑම බලයක් ම Ox අක්ෂය සමඟ θ කෝණයක් සාදයි.

i. බල පද්ධතිය O හි දී ක්‍රියා කරන තනි බලයකට හා බල යුග්මයකට ඌනනය කරන්න.

ii. සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

iii. θ විචල්‍ය වන විට අදාළ සම්ප්‍රයුක්ත බලය අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වා එම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$$X_i = F_i \cos\theta \,(i = 1, 2, \ldots n)$$

$$X = \sum_{\underline{i}=1}^{n} X_i = \cos\theta \sum_{\underline{i}=1}^{n} F_i$$

$$Y_i = F_i \sin\theta \qquad \boldsymbol{i} = (1, 2, \ldots\ n)$$

$$Y = \sum_{\underline{i}=1}^{n} Y_i = \sin\theta \sum_{\underline{i}=1}^{n} F_i$$

O වටා Fi බලයේ සූර්ණය

$G_i = Y_i x_i - X_i y_i$

සූර්ණවල එකතුව $\quad G = \sum_{i=1}^{n} G_i$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i x_i - X_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} X_i y_i$$

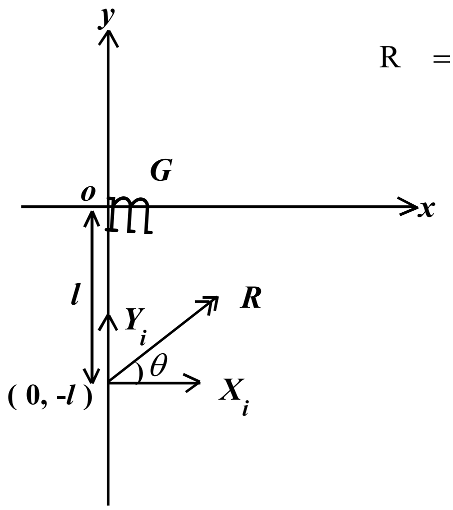
$$= \ = \sin\theta\sum_{i=1}^{n} F_i x_i - \cos\theta\sum_{i=1}^{n} F_i y_i$$

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$= \cos^2\theta\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)^2 + \sin^2\theta\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)^2$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i$$



සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාවට y අක්ෂය හමුවන ලක්ෂය $(0,-l)$ නම්

Om වටා සූර්ණ ගත්විට

$$X_i \times l = G$$

$$l = \frac{G}{X_i} \Rightarrow l = \frac{\sin\theta\sum_{i=1}^{n} F_i x_i - \cos\theta\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\cos\theta\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

ක්‍රියා රේඛාවේ අනුක්‍රමණය $\quad = \dfrac{Y_i}{X_i}$

$$= \frac{\sin\theta\sum_{i=1}^{n} F_i}{\cos\theta\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

$$= \tan\theta$$

$\therefore$ ක්‍රියාරේඛාවේ සමීකරණය

$$y = \tan\theta\ x - l$$

$$y = \tan\theta\ x - \left[\frac{\sin\theta\sum_{i=1}^{n} F_i x_i - \cos\theta\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\cos\theta\sum_{i=1}^{n} F_i}\right]$$

$$y\cos\theta\sum_{i=1}^{n}F_i = x\sin\theta\sum_{i=1}^{n}F_i - \sin\theta\sum_{i=1}^{n}F_ix_i + \cos\theta\sum_{i=1}^{n}F_iy_i$$
$$x\sin\theta\sum_{i=1}^{n}F_i - y\cos\theta\sum_{i=1}^{n}F_i + \cos\theta\sum_{i=1}^{n}F_iy_i - \sin\theta\sum_{i=1}^{n}F_ix_i = 0$$

මෙය θ මත රඳා පවතින විචල්‍ය රේඛාවකි.

$$\sin\theta\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i x_i - x\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i\right) - \cos\theta\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i y_i - y\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i\right) = 0$$

මෙය සියලු θ අගයන් සඳහා

$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i x_i - x\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i = 0$ සහ $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i y_i - y\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i = 0$ යන රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂය හරහා යන සරල රේඛාවකි.

එම නිසා ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i}\right)$ වේ.

උදාහරණය 11

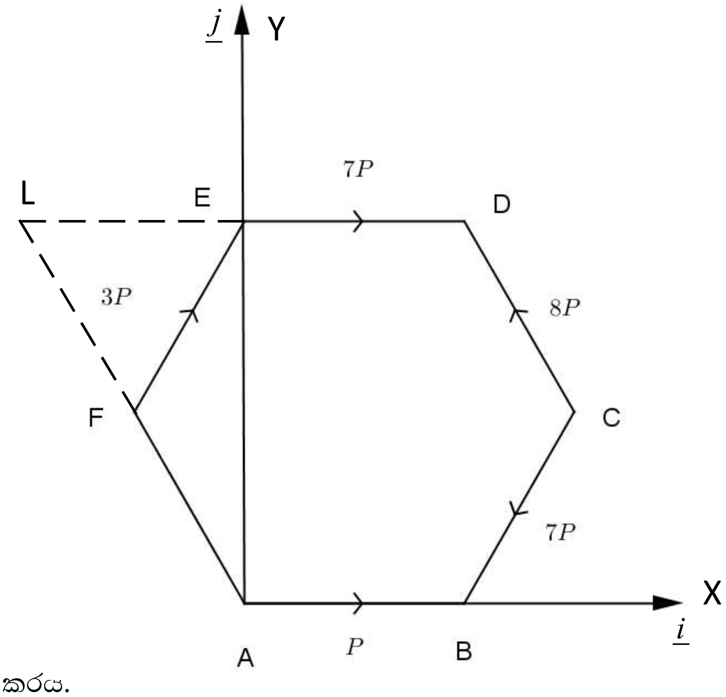
පැත්තක දිග a වන සවිධි ABCDEF ෂඩස්‍රයක P, 7P, 8P, 7P, 3P බල පිළිවෙළින් AB, CB, CD, ED සහ FE ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ සහ $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ දිශාවලට වූ ඒකක දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{i}$ සහ $\underline{j}$ ලෙස ගනිමින් සියලු ම බල $\underline{i}, \underline{j}$ සහ P ඇසුරින් ලියන්න.

එම බල පද්ධතිය $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ට සමාන්තරව $\underline{\mathrm{R}} = 2\mathrm{P}(\underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j})$ තනි බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

$\underline{\mathrm{R}}$ බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.

තව ද සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාව DE සහ AF (දෙකම දික්කරන ලද) රේඛාවල පොදු ලක්ෂ්‍ය හරහා යන බව පෙන්වන්න.

බල පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන R බලයක් සමඟ බල යුග්මයකට තුල්‍ය වෙයි නම් බල යුග්මයේ ඝූර්ණය සහ අභිදිශාව සොයන්න.



බල

$P\underline{i}$, $\overrightarrow{AB}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරය.

$7P\left(-\frac{1}{2}\underline{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j}\right)$ බලය $\overrightarrow{CE}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

$8P\left(-\frac{1}{2}\underline{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j}\right)$ බලය $\overrightarrow{CD}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

$7P\underline{i}$ බලය $\overrightarrow{ED}$

$3P\left(\frac{1}{2}\underline{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j}\right)$ බලය $\overrightarrow{FE}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

$$\text{සම්ප්‍රයුක්තය } \underline{R} = \left(1-\frac{7}{2}-\frac{8}{2}+7+\frac{3}{2}\right)P\underline{i} + \left(-\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)P\underline{j}$$

$$= 2P\underline{i} + 2\sqrt{3}\,P\underline{j}$$

$$= 2P\left(\underline{i}+\sqrt{3}\,\underline{j}\right) \text{ සම්ප්‍රයුක්තය තනි බලයකි.}$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{a}{2}\underline{i}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\underline{j}$$

$$= \frac{a}{2}\left(\underline{i}+\sqrt{3}\,\underline{j}\right)$$

$\therefore$ $\underline{\mathbf{R}}$ බලය $\overrightarrow{BC}$ සමාන්තර වේ.

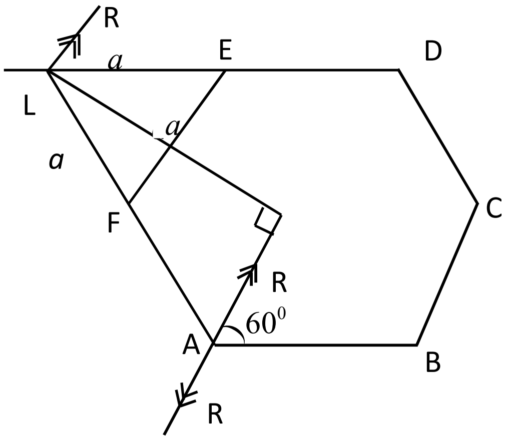
$$|\underline{R}| = \sqrt{(2P)^2 + (2\sqrt{3}P)^2}$$
$$= 4P$$

L වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්

$P \times 2a\cos30 - 7P \times 3a\cos30 + 8P \times 2a\sin60 + 3P \times a\sin60$

$21Pa\sin60 - 21Pa\cos30 = 0$

දික් කළ DE හා AF ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා සම්ප්‍රයුක්තය ගමන් කරයි.



පද්ධතිය A හරහා වූ R තනි බලයක හා යුග්මයකට ඌනනය වේ නම්, L හි වූ R හා A හි වූ -R මගින් ඇතිවන බල යුග්මය AFEDCB අතට වූ ඝූර්ණය $R \times 2a\sin60$ වේ.

එනම් $4P \times 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}Pa$ වේ.

4.1 අභ්‍යාසය

1. පැත්තක දිග a වන ABCD සමචතුරස්‍රයක AB, BC, CD, DA පාද සහ BD විකර්ණය ඔස්සේ පිළිවෙළින් 1, 3, 5, 7, $9\sqrt{2}$ ක්‍රියා කරයි. AB සහ AD රේඛා x සහ y අක්ෂ ලෙස ගෙන
   i. සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.
   ii. සම්ප්‍රයුක්ත රේඛාව AB කපන ලක්ෂ්‍ය සොයන්න.

2. ABCDEF යනු පැත්ක දිග a වන සවිධි ෂඩස්‍රයකි. නිව්ටන් 1, 3, 2, 4 බල පිළිවෙළින් AB, BE, ED සහ DA ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. AB සහ AE රේඛා x සහ y අක්ෂ ලෙස ගෙන
   i. සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය හා දිශාව
   ii. ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

3. පැත්තක දිග a වන සවිධි ෂඩස්‍රයක F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F බල පිළිවෙළින් AB, BC, CD, DE, DF, FA පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.
   i. එම බලවල සම්ප්‍රයුක්තය දෙන ලද බලයකට සමාන්තර ව 6F බලයක් බව ද
   ii. කේන්ද්‍රයේ සිට එම බලයට සහ සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවට පවතින දුර අතර අනුපාතය 2 : 7 බව ද පෙන්වන්න.

4. නිව්ටන් 4, 3, 3 බල පිළිවෙළින් AB, BC, CA ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. මෙහි ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන අතර පැත්තක දිග 0.6 m වේ.
   i. සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය හා දිශාව
   ii. C ලක්ෂ්‍යයේ සිට සම්ප්‍රයුක්ත බලය ක්‍රියා රේඛාවට ලම්බක දුර
   iii. අමතර F බලයක් C ලක්ෂ්‍යයේ දී ABD, තලයේ ක්‍රියා කරන පරිදි එකතු කරනු ලැබේ. දැන් පද්ධතිය බල යුග්මයක් සාදයි. nd බල යුග්මයේ ඝූර්ණය ද එකතු කළ බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව ද සොයන්න.

5. O, A, B, C ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින් (0, 0), (3, 0), (3, 4) සහ (0, 4) වේ. විශාලත්වයෙන් නිවුටන් 7, 6, 2, 9, 5 බල පිළිවෙළින් CA, AB, BC, CO, OB ඔස්සේ ක්‍රියාකරයි. ඝූර්ණය ඒකක 16 වන යුග්මයක් OCBA තලයේ එම අකුරුවලින් දැක්වෙන අතට ක්‍රියා කරයි.
   පද්ධතිය O හි දී ක්‍රියා කරන බලයකට හා යුග්මයකට ඌනනය වේ.
   පද්ධතිය $3x - 4y - 5 = 0$ රේඛාව ඔස්සේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට ඌනනය වන බව පෙන්වන්න.

6. කේන්ද්‍රය O වන පැත්තක දිග a වන ABCDEF සවිධි ෂඩස්‍රයක AB, BC, CD, DE, EF පාද ඔස්සේ පිළිවෙළින් නිව්ටන් P, 2P, 3P, 4P, 5P බල ක්‍රියා කරයි. Q, R, S බල තුනක් AF, FO, OA ඔස්සේ පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. පහත අවස්ථාවල Q, R, S බලවල විශාලත්ව P ඇසුරෙන් සොයන්න.
   i. බල පද්ධතිය සමතුලිත විට
   ii. පද්ධතිය ABC අතට එම තලයේ ක්‍රියා කරන $Pa\sqrt{3}$ Nm යුග්මයකට සමාන වන විට

7. A, B, C, D, E, F යනු පැත්තක දිග $2a$ වූ සවිධි ෂඩස්‍රයක ඔරලෝසුවේ කටු කැරකෙන අතට ප්‍රතිවිරුද්ධ අතට පිහිටි ශීර්ෂ වේ. විශාලත්වයෙන් නිව්ටන් P, 2P, P, mP, nP සහ 2P වූ බලයන් AB, CB, DC, DE, FE සහ FA පාද දිගේ අක්‍ෂර මගින් දැක්වෙන පිළිවෙළට ක්‍රියා කරයි.

i. පද්ධතිය DA දිගේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට තුල්‍ය නම් mහි සහ n හි අගයන් සොයන්න.

ii. දක්ෂිණාවර්ත ව විශාලත්වය $2\sqrt{3}\,\mathrm{P}a\,\mathrm{N}m$ වූ බල යුග්මයක් ෂඩස්‍රයේ තලයේ පද්ධතියට එකතු කළ විට අලුත් පද්ධතිය තනි බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා අවශ්‍ය නම් දික් කරන ලද AB සමඟ එහි ක්‍රියා රේඛාව හමුවන ලක්‍ෂය සොයන්න.

8. ABCD යනු පැත්තක දිග මීටර් a වන සමචතුරස්‍රයකි. විශාලත්වයෙන් නිව්ටන් 4, $6\sqrt{2}$, 8, 10, X සහ Y වන බල පිළිවෙලින් AD, CD, AC, BD, AB සහ CB දිගේ අකුරුවලින් දැක්වෙන පිළිවෙළට වූ දිශාවන් ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ දිගේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට තුල්‍ය වේ. මෙහි O සහ E යනු පිළිවෙළින් ACහි සහ CDහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. Xහි සහ Yහි අගයන් සොයා සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය නිව්ටන් 4K බව පෙන්වන්න. මෙහි K $= 2 - \sqrt{2}$ වේ.

F යනු OAFD සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයකි. ඉහත පද්ධතියට තුල්‍ය වන පරිදි $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ දිගේ සහ F ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන බල දෙකක් සොයන්න.

මුල් පද්ධතියට එම බලවල තලයේ ABCD අතට ක්‍රියා කරන නිව්ටන් මීටර් 6 ka ඝූර්ණයක් සහිත බල යුග්මයක් එකතු කරන ලදී. අලුත් පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

9. ABC යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O සහ අරය R වේ. පද්ධතිය විශාලත්වයෙන් L, L, M, M සහ N, N වූ BC, OA, CA, OB, AF සහ OC දිගේ පිළිවෙළින් අක්ෂර මගික් දැක්වෙන දිශාවට ක්‍රියා කරන බල හයකින් සහ ACB අතට ABC ත්‍රිකෝණයේ තලයේ ක්‍රියා කරන නිශ්ශුන්‍ය $\lambda\mathrm{R}(\mathrm{L}+\mathrm{M}+\mathrm{N})$ ඝූර්ණයකින් යුක්ත බල යුග්මයකින් සමන්විත ය. පද්ධතිය

a. තනි බලයකට ඌනනය වේ නම් $\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2 > \mathrm{LM}+\mathrm{MN}+\mathrm{NL}$

b. තනි බල යුග්මයකට ඌනනය වේ නම් $\mathrm{L}=\mathrm{M}=\mathrm{N}, \lambda \neq \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

මෙම පද්ධතිය සමතුලිත වීම සඳහා අනිවාර්ය හා ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතා ප්‍රකාශ කරන්න.

10. ABCD යනු පැත්තක දිග 5 m වන සමචතුරස්‍රයකි. AE =3m වන පරිදි AB මත E පිහිටයි. නිව්ටන් λP, μP, υP, 2P, 10P සහ $2\sqrt{2}$ P වන බලයන් BA, BC, CD, AD, DE සහ DB දිගේ පිළිවෙළින් අකුරුවලින් දැක්වෙන ආකාරයට වූ දිශා ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

i. පද්ධතිය සමතුලිතතාවි ඇති විට $\lambda=\mu=6$ සහ $\upsilon=4$ බව පෙන්වන්න.

ii. $\upsilon \neq 4$ සහ $\lambda=\mu=6$ නම් පද්ධතිය තනි බලයකට ඌනනය වන බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය, දිශාව සහ ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

iii. $\upsilon=2$ සහ $\lambda=\mu=6$ නම් පද්ධතිය බල ඝූර්ණය 80 Nm වන බල යුග්මයකට ඌනනය වීම සඳහා පද්ධතියට එකතු කළ යුතු බලයේ විශාලත්වය, දිශාව සහ ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

11. නිව්ටන් P, 7P, 8P, 7P, 3P වන බලයන් පැත්තක දිග මීටර් a වන ABCDEF සවිධි ෂඩාස්‍රයක AB, CB, CD, ED, FE පැති දිගේ පිළිවෙළින් අකුරු මඟින් දැක්වෙන ආකාරයට වූ දිශා ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. $\underline{i}$ සහ $\underline{j}$ යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}$ සහ $\overrightarrow{AE}$ දිශාවල ඒකක දෛශික ලෙස ගෙන එක් එක් බලයන් $\underline{i}, \underline{j}$ සහ P පදවලින් ප්‍රකාශ කරන්න.

දී ඇති පද්ධතිය $\overrightarrow{BC}$ ට සමාන්තර $\underline{R} = 2P\left(\underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}\right)$ වන තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය බව පෙන්වන්න.

Rහි විශාලත්වය කීය ද?

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව දික් කරන ලද DEහි සහ AF හි පොදු ලක්ෂ්‍ය හරහා යන බව පෙන්වන්න.

පද්ධතිය A ශීර්ෂය හරහා ක්‍රියා කරන $\underline{R}$ බලයක් සමඟ බල යුග්මයකට තුල්‍ය නම් බල යුග්මයේ ඝූර්ණයේ විශාලත්වය සහ අභිදිශාව සොයන්න.

12. Ox සහ Oy සෘජුකෝණාස්‍රාකාර කාටීසීය අක්ෂ අනුබද්ධයෙන් A, B සහ C ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින් $\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $(0, -1)$ සහ $\left(2\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ වේ. විශාලත්වයෙන් නිව්ටන් 6P, 4P, 2P සහ $2\sqrt{3}\,P$ වන බලයන් පිළිවෙළින් OA, BC, CA සහ BO දිශා ඔස්සේ අක්ෂවල පටිපාටියෙන් දැක්වෙන අතට ක්‍රියා කරයි. මෙම බලවල සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය සහ දිශාව සොයන්න.

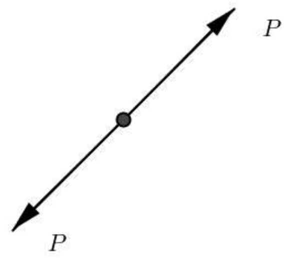
සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව y අක්ෂය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

එමඟින් සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

විශාලත්වය නිව්ටන් $6\sqrt{3}\,P$ වන $\overrightarrow{AB}$ දිගේ ක්‍රියා කරන තවත් බලයක් පද්ධතියට අලුතින් හඳුන්වා දී ඇත් නම් පද්ධතිය නිව්ටන් මීටර් 10P විශාලත්වයන් ඇති බල යුග්මයකට ඌනනය වන බව පෙන්වන්න.

4.4 ඒකතල බල යටතේ දෘඪ වස්තුවක සමතුලිතතාව

<u>(1) බල දෙකක ක්‍රියාකාරිත්වය යටතේ</u>



බල දෙක විශාලත්වයෙන් සමාන ව දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධව එකම රේඛාව දිගේ ක්‍රියා කරයි නම් වස්තුව සමතුලිතතාවේ පවතී.

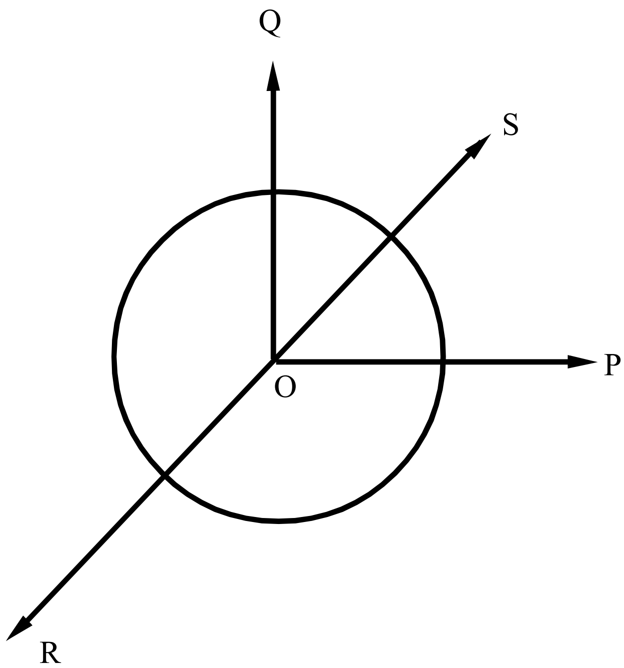
<u>(2) බල තුනක ක්‍රියාකාරිත්වය යටතේ</u>

අවස්ථා දෙකක් සැලකීමට ඇත.

(i) බල තුන ම සමාන්තර නොවන විට
(ii) බල සියල්ල ම සමාන්තර විට

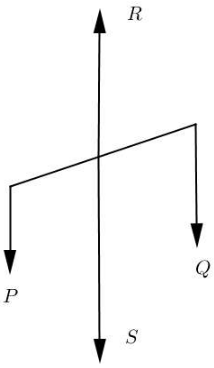
(i) හි දී බලවල ක්‍රියාරේඛා සියල්ල ම එකම ලක්ෂ්‍යයක දී හමු විය යුතුය. කවර හෝ බල දෙකක සම්ප්‍රයුක්ත බලය තුන්වන බලයේ විශාලත්වයට සමාන හා දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ විය යුතු යි.

සාධනය :



P, Q, R යනු දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල තුනක් ලෙස හා P, Q බලවල ක්‍රියාරේඛා O ලක්ෂ්‍යයේ දී හමුවේ යැයි ගනිමු. එවිට P, Qහි සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ (S හි) ක්‍රියාරේඛාව O හරහා යයි. දැන් දෘඪ වස්තුව මත ක්‍රියාකරනු ලබන්නේ මෙම S බලය හා R බලය නිසා බල දෙකක් යටතේ වස්තුව සමතුලිතවීමට ඒවා විශාලත්වයෙන් සමානව, දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධව, ඒක රේඛීය විය යුතු නිසා Rහි ක්‍රියාරේඛාවද O හරහා යයි.

(ii) හි P,Q,R සියල්ල ම සමාන්තර වේ.



P සහ Q එක ම දිශාවට ක්‍රියා කරන බල ලෙස ගනිමු. එවිට ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්තය වන S බලය P ට හෝ Qට හෝ සමාන්තර වේ. දැන් S සහ R. සමාන්තර බල දෙකකි. සමතුලිතතාව සඳහා S සහ R බලදෙක විශාලත්වයෙන් සමානව දිශාවෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධව එකම ක්‍රියා රේඛාව මත විය යුතු ය. නැත්නම් බල යුග්මයක් සෑදේ.

දෘඪ වස්තුවක් ඒකතල බල තුනක ක්‍රියාකාරිත්වය යටතේ සමතුලිතතාවේ පවතී නම් පහත ප්‍රතිඵල භාවිත කළ හැකි වේ.

i ලාමී ප්‍රමේයය
ii බල ත්‍රිකෝණ නියමය
iii එකිනෙකට ලම්භක දිශා දෙකක් ඔස්සේ විභේදන සංරචකවල එකතුව ශුන්‍ය වේ.

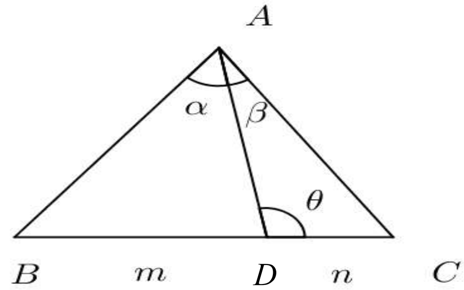
එලෙසම පහත ත්‍රිකෝණමිතික ප්‍රමේයයද සමතුලිතතා ගැටලු විසඳීමේදී ප්‍රයෝජනවත් වේ.

ප්‍රමේයය :

ABC ත්‍රිකෝණයෙහි BC පාදය මත D ලක්ෂය පිහිටා ඇත්තේ $BD : DC = m : n$ සහ $B\hat{A}D = \alpha$, $C\hat{A}D = \beta$, $A\hat{D}C = \theta$ වන පරිදි නම්

(i) $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$

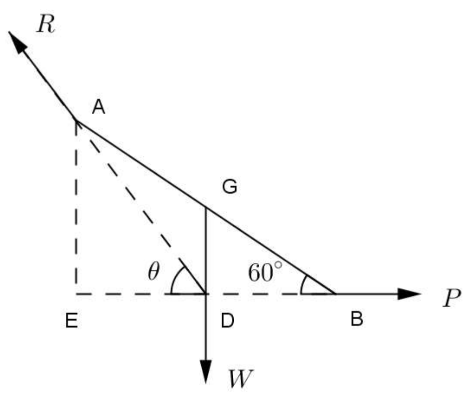
(ii) $(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C$



4.5 විසඳූ නිදසුන්

උදාහරණය 1

බර W වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක එහි B කෙළවරට තිරස් P බලයක් යොදා දණ්ඩ තිරසට 60^0ක කෝණයකින් ආනතව A කෙළවරෙන් අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව අසව් කර සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත. Aහි දී දණ්ඩමත අසව්ව මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



යෙදෙන බල

(i) දණ්ඩේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙන් සිරස් ව පහළට ක්‍රියා කරන දණ්ඩේ බර W
(ii) B හි දී තිරස් බලය P
(iii) Aහි දී අසව්ව මගින් දණ්ඩම ඇතිකරන ප්‍රතික්‍රියාව R

දණ්ඩ මෙම බල තුන යටතේ සමතුලිතතාවේ පවතින බැවින් ඒවායේ ක්‍රියාරේඛාවකට ම ලක්ෂ්‍යයක දී හමුවිය යුතු ය. එම ලක්ෂ්‍යය D ලෙස ගනිමු.

$AB = 2a$ සහ $\angle ADE = \theta$ ලෙස ගනිමු.

$AE = 2a\sin 60° = \sqrt{3}a$

$$ED = \frac{1}{2} \times 2a\cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{AE}{ED} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos ec\theta = \sqrt{1+\cot^2\theta}$$

$$\cos ec\theta = \sqrt{1+\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{13}{12}}$$

(i) වන ක්‍රමය

ලාමී ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්

$$\frac{P}{\sin(90+\theta)} = \frac{R}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin(180-\theta)}$$

$$\frac{P}{\cos\theta} = R = \frac{W}{\sin\theta}$$

$$P = W\cot\theta$$

$$R = W\cos ec\theta$$

$$P = \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}W}{6}N$$

$$R = W\sqrt{\frac{13}{12}}N$$

(ii) වන ක්‍රමය

AED ත්‍රිකෝණයේ AE , W,ට සමාන්තර වේ. ED,DA මගින් P සහ R නිරූපණය කළ හැකි ය. එනම් ΔAED ත්‍රිකෝණය බල ත්‍රිකෝණය යි.

R $\rightarrow$ DA

W $\rightarrow$ AE

P $\rightarrow$ ED

එවිට $\frac{\text{P}}{\text{ED}} = \frac{\text{W}}{\text{AE}} = \frac{\text{R}}{\text{DA}}$

$$\frac{\text{P}}{\frac{a}{2}} = \frac{\text{W}}{\sqrt{3}\,a} = \frac{\text{R}}{\frac{\sqrt{13}\,a}{2}}$$

$$\text{AD} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}a$$

$\text{P} = \frac{\text{W}}{2\sqrt{3}}$ සහ $\text{R} = \text{W}\sqrt{\frac{13}{12}}$

(iii) වන ක්‍රමය

බල විභේදනයෙන්

බල තිරස්ව විභේදනයෙන් $\rightarrow$

$$P - R\cos\theta = 0$$

$$P = R\cos\theta$$

බල සිරස්ව විභේදනයෙන් $\uparrow$

$$R\sin\theta - W = 0$$

$$R = \frac{W}{\sin\theta} = W\sqrt{\frac{13}{12}}N$$

$$P = W\cot\theta = \frac{W}{2\sqrt{3}}N$$

උදාහරණය 2

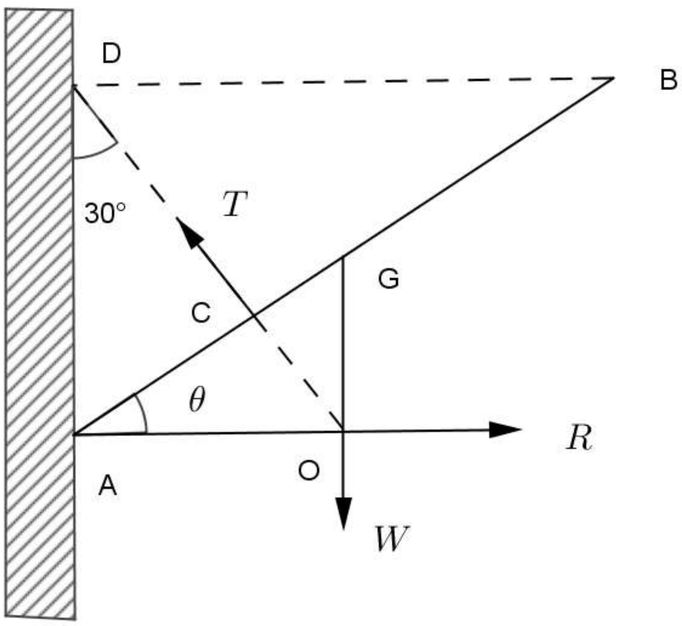
බර W වන ACB ඒකාකාර දණ්ඩක් එහි A කෙළවර සුමට සිරස් AD බිත්තියක් මත ගැටෙමින් DB තිරස් වන පරිදි සහ CD බිත්තිය සමඟ 30^0න් ආනත ව පවතින පරිදි CD සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් B කෙළවර A ට ඉහළින් පිහිටන පරිදි බිත්තියට ලම්බ සිරස්තලයක් සමතුලිතව තබා ඇත.

i තන්තුවේ ආතතිය

ii බිත්තිය මඟින් දණ්ඩ මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව

iii දණ්ඩේ තිරයට ආනතිය සොයන්න.

iv C ලක්ෂ්‍යය පිහිටීම



ක්‍රියා කරන බල

i $AG = a$ වන පරිදි G හරහා සිරස් ව පහළට W බර

ii A හි දී ක්‍රියා කරන R තිරස් බලය

iii තන්තුවේ ආතතිය T

දණ්ඩ සමතුලිතතාවේ පවතින බැවින් බල තුන එක ම O ලක්ෂ්‍යයක දී හමු විය යුතු ය. දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය θ ලෙස ගනිමු.

බල $\leftarrow$ තිරස් විභේදනයෙන්

$$T\sin 30^\circ - R = 0$$

$$R = \frac{T}{2}$$

බල $\uparrow$ සිරස් විභේදනයෙන්

$$T\cos 30 - W = 0$$

$$T = \frac{2W}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}W \Rightarrow R = \frac{W}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}W}{3}$$

ABහි සමතුලිතතාව සඳහා D වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$R \times AD - W \times AO = 0$$

$$\frac{W}{\sqrt{3}} \times 2a\sin\theta = W \times a\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

CD ත්‍රිකෝණයට සයින් නිතිය

$$\frac{AC}{\sin 30} = \frac{AD}{\sin(120-\theta)}$$

$$\frac{AC}{\frac{1}{2}} = \frac{2a\sin\theta}{\cos(30-\theta)}$$

$$AC = \frac{a\sin\theta}{\cos 30\cos\theta + \sin 30\sin\theta} = \frac{a}{\cos 30\cot\theta + \sin 30}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}+1} = \frac{2a}{3}$$

$$AC = \frac{1}{3}AB$$

2 වන ක්‍රමය
ලාමී ප්‍රමේයයෙන්

$$\frac{T}{\sin 90^0} = \frac{W}{\sin 120^0} = \frac{R}{\sin 150^0}$$

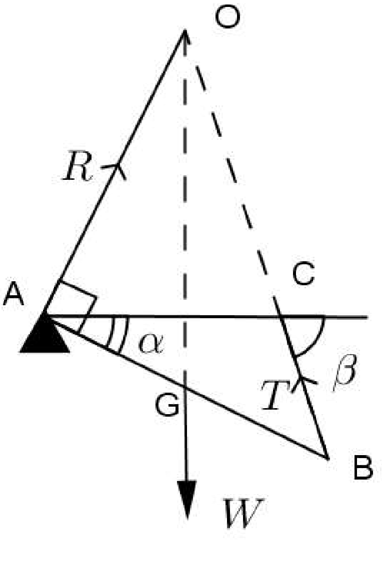
$$T = \frac{W}{\cos 30^0} \qquad R = \frac{W\cos 60^0}{\cos 30^0}$$

$$T = \frac{2W}{\sqrt{3}}N \qquad R = \frac{W}{\sqrt{3}}N$$

උදාහරණය 3

AB ඒකාකාර දණ්ඩක් එහි ඉහළ A කෙළවර සුමට නාදත්තක් මත නිශ්චල ව සහ එහි පහළ B කෙළවර A හා එක ම මට්ටමේ ඇති C ලක්ෂ්‍යයට සැහැල්ලු අවිතන්‍ය ලණුවකින් සම්බන්ධ කර තිරසට α කෝණයකින් ආනත ව සමතුලිතතාවී තබා ඇත. ලණුව තිරසට ආනත කෝණය β,

$\tan\beta = 2\tan\alpha + \cot\alpha$ සහ $AC = \dfrac{AB\sec\alpha}{1+2\tan^2\alpha}$ සමීකරණය මඟින් දෙනු ලබන බව ඔප්පු කරන්න.



ක්‍රියාකරන බලයන්

- i දණ්ඩේ බර W
- ii ලණුවේ ආනතිය T
- iii දණ්ඩට ලම්බක ව නාදත්ත මඟින් දණ්ඩ මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව R

දණ්ඩ බල තුන යටතේ සමතුලිතතාව පවතී. එම බල O ලක්ෂ්‍යයේ දී හමුවේ.
AOB ත්‍රිකෝණයට කොටි නීතිය

$\left(AG+GB\right)\cot\angle OGB = GB\cot 90 - AG\cot\angle ABO$ (දණ්ඩේ දිග $2a$ වේ)

$$\angle OBA = \beta - \alpha$$
$$\angle OAB = 90^\circ$$
$$\angle OGB = 90^\circ + \alpha$$

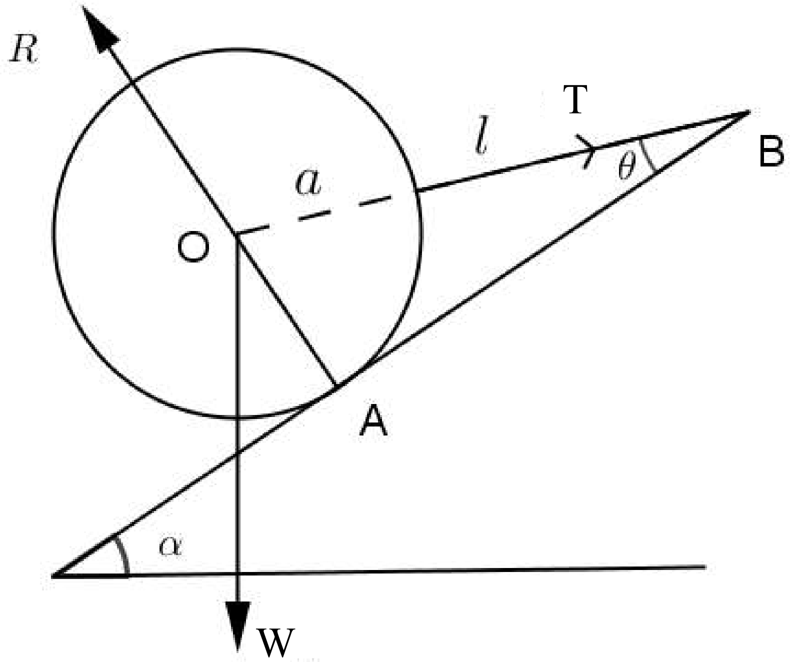
$$(a+a)\cot(90+\alpha) = a\cot 90^0 - a\cot(\beta-\alpha)$$
$$2\tan\alpha = \cot(\beta-\alpha)$$
$$2\tan\alpha = \frac{1+\tan\beta\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}$$
$$\tan\beta(2\tan\alpha - \tan\alpha) = 1+2\tan^2\alpha$$
$$\tan\beta = \frac{1+2\tan^2\alpha}{\tan\alpha}$$
$$\tan\beta = \cot\alpha + 2\tan\alpha$$

ABC ත්‍රිකෝණයට සයින් නීතිය

$$\frac{AC}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{AB}{\sin(180-\beta)}$$
$$AC = \frac{AB\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}$$
$$AC = \frac{AB}{\sin\beta}\left[\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha\right]$$
$$AC = AB\left[\cos\alpha - \cot\beta\sin\alpha\right]$$
$$= AB\left[\cos\alpha - \frac{\tan\alpha}{1+2\tan^2\alpha}\sin\alpha\right]$$
$$= \frac{AB}{1+2\tan^2\alpha}\left[\cos\alpha + \frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right]$$
$$= \frac{AB}{1+2\tan^2\alpha}\left[\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right]$$
$$AC = \frac{AB\sec\alpha}{1+2\tan^2\alpha}$$

උදාහරණ 4

අරය a සහ බර W වන ගෝලයක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත සුමට තලයක් මත සමතුලිත ව ඇත්තේ දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක කෙළවරක් ගෝලය මත ඇති ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ආතන තලයේ ලක්ෂ්‍යයකට ද සම්බන්ධ කිරීමෙනි. තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$ බව පෙන්වන්න.



ක්‍රියාකරන බල

i O හරහා සිරස් ව පහළට ගෝලයේ බර W

ii O හරහා තලයට ලම්බක ව තලය මඟින් ගෝලය මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව R

iii තන්තුවේ ආතතිය T

බල තුන යටතේ ගෝලය සමතුලිතතාවේ ඇති බැවින් තන්තුවේ ආතතිය O හරහා යා යුතු ය.
AOB ත්‍රිකෝණයේ

$$OB = a + l$$

$$OA = a$$

$$AB^2 = (a+l)^2 - a^2 = l^2 + 2al$$

$$AB = \sqrt{l^2+2al}$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{OB}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{l^2+2al}}{a+l}$$

ක්‍රමය 1 වන ක්‍රමය

බල තලයට සමාන්තර ව විභේදනයෙන්

$$O \quad T\cos\theta - W\cos(90-\alpha) = 0$$

$$T = \frac{W\sin\alpha}{\cos\theta}$$

$$= W\sin\alpha.\frac{(a+l)}{\sqrt{l^2+2al}} = \frac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$$

2 වන ක්‍රමය
ලාමී ප්‍රමේයය

$$\frac{R}{\sin(90+\alpha-\theta)} = \frac{W}{\sin(90+\theta)} = \frac{T}{\sin\alpha}$$

$$T = \frac{W\sin\alpha}{\cos\theta} = \frac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$$

උදාහරණය 5

බර W වන දණ්ඩක් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ දී 2:1 අනුපාතයට බෙදයි. දණ්ඩ සුමට කුහර ගෝලයක් ඇතුළත සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ දණ්ඩ මඟින් කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණය 2α වන පරිදි ය. තව ද දණ්ඩ තිරසට θ කෝණයක් සාදයි නම් $\tan\theta = \frac{1}{3}\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න. තවද දණ්ඩේ අන්ත දෙක මත ක්‍රියා කරන බල W සහ α ඇසුරෙන් සොයන්න.

ක්‍රියාකරන බල

(i) O හරහා ක්‍රියා කරන දණ්ඩේ බර W

(ii) O කේන්ද්‍රය හරහා යන දණ්ඩේ A සහ B කෙළවරවල ප්‍රතික්‍රියා

$$\angle OGA = 90-\theta$$

$$\angle OAB = \angle OBA = 90-\alpha$$

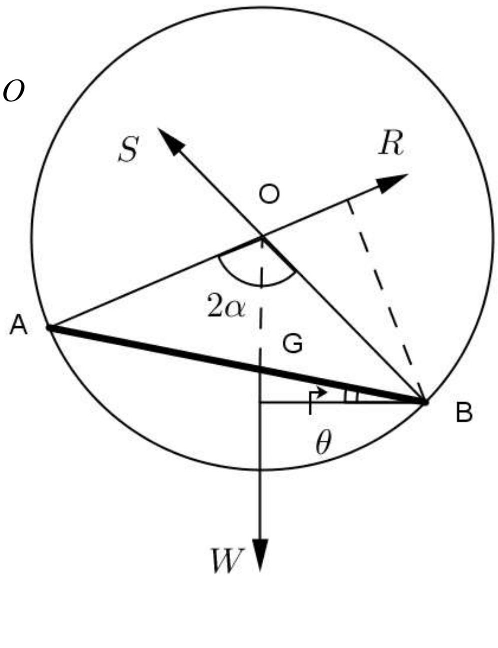
AOB ත්‍රිකෝණයට cot සූත්‍රය යෙදුමට

$$(BG+GA)\cot(90-\theta) = GA.\cot\angle ABO - BG.\cot\angle BAO$$

$$3\cot(90-\theta) = 2\cot(90-\alpha) - 1.\cot(90-\alpha)$$

$$3\tan\theta = \tan\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{1}{3}\tan\alpha$$



AB හි සමතුලිතතාව සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$n \quad R\times 3a\sin(90-\alpha) - Wa\cos\theta = 0$$

$$3R\cos\alpha = W\cos\theta$$

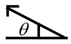
$$R = \frac{W\cos\theta}{3\cos\alpha}$$

$$R = \frac{W}{3\cos\alpha}\cdot\frac{3}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$

$$R = \frac{W}{\sqrt{9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} = \frac{W}{\sqrt{8\cos^2\alpha+1}}$$

$$\sec^2\theta = \frac{9+\tan^2\alpha}{9}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$

දණ්ඩ දිගේ බල විභේදනයෙන් 

$$S.\cos\left(90-\alpha\right) - R.\cos\left(90-\alpha\right) - W.\cos(90-\theta) = 0$$

$$S.\sin\alpha - R.\sin\alpha - W\sin\theta = 0$$

$$S.\sin\alpha = R\sin\alpha + W\sin\theta$$

$$= \frac{W}{\cos\alpha}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}} + W\frac{\tan\alpha}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$

$$= \frac{2W\tan\alpha}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$

$$S = \frac{2W}{\cos\alpha\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$

$$= \frac{2W}{\sqrt{8\cos^2\alpha+1}}$$

උදාහරණය 6

බර W වූද අර්ධ ශිර්ෂ කෝණය 30° සහ පාදයේ අරය a වූද ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක් තිරසට α කෝණයට ආනත සුමට තලයක් මත තබා ඇත. දිග $\sqrt{3}a$ වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් කේතුවේ පාදයේ කේන්ද්‍රයට ද අනෙක් කෙළවර ආනත තලයට ද සම්බන්ධ කර ඇත. වක්‍ර පෘෂ්ඨය තලය සමඟ ස්පර්ශ ව පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී නම්,

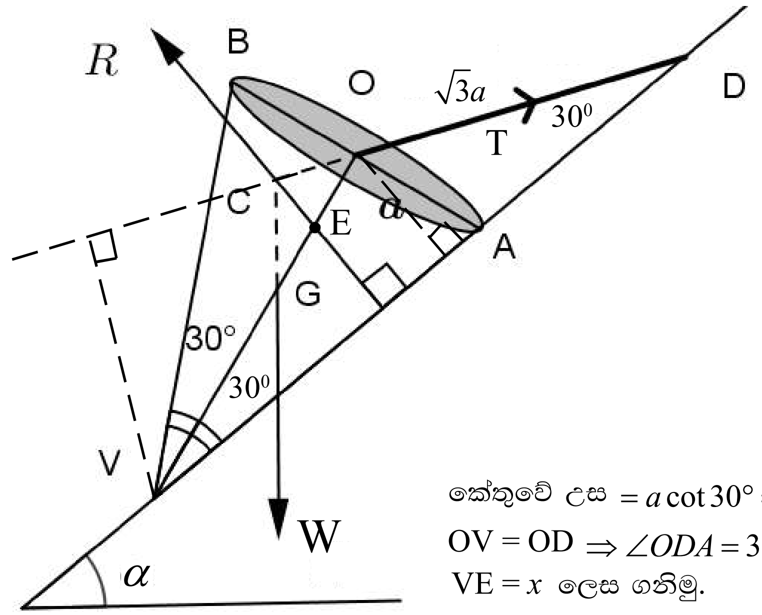
i   තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{2\sqrt{3}W\sin\alpha}{3}$ බව පෙන්වන්න.

ii   වක්‍ර පෘෂ්ඨය සහ තලය අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

iii   එම ප්‍රතික්‍රියාවේ රේඛාව කේතුවේ සමමිතික අක්ෂය එහි ශිර්ෂයේ සිට

$\dfrac{3a}{4}\left[\dfrac{3\sqrt{3}\cos\alpha+5\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}\right]$ දුරකින් ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.

(උස h වන ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි ශීර්ෂයේ සිට $\dfrac{3h}{4}$ දුරින් පිහිටයි.)



කේතුවේ උස $= a\cot 30° = a\sqrt{3}$

OV = OD $\Rightarrow \angle ODA = 30°$

VE = x ලෙස ගනිමු.

සමතුලිතතාව සඳහා W සහ T බලයන් C හි දී හමු වන නිසා R ප්‍රතික්‍රියාව C හරහා යා යුතු ය.

බලතලයට සමාන්තරව විභේදනයෙන්

O $T\cos 30 - W\sin\alpha = 0$

$$T = \frac{2\sqrt{3}W\sin\alpha}{3}$$

බල තලයට ලම්බකව විභේදනයෙන්

M $R - W\cos\alpha - T\sin 30 = 0$

$$R = \frac{T}{2} + W\cos\alpha = \frac{W}{3}\left[\sqrt{3}\sin\alpha + 3\cos\alpha\right]$$

V m වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$R \times x\cos 30^0 - W.\frac{3}{4}a\sqrt{3}\cos(30^0 + \alpha) - T2\sqrt{3}a\cos 30^0.\sin 30^0 = 0$$

$$R \times x\cos 30 - W.\frac{3}{4}a\sqrt{3}\cos(30 + \alpha) - T\sin 30 \times 2a\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$R.x\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}Wa}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right] + \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}W}{3}\sin\alpha \times 3a$$

$$R.x = \frac{3Wa}{4}\left(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha\right) + 2Wa\sin\alpha$$

$$R.x = \frac{W}{4}\left(3\sqrt{3}\cos\alpha - 3\sin\alpha + 8\sin\alpha\right)a$$

$$x = \frac{W}{4}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos\alpha + 5\sin\alpha}{3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}\right)\frac{3a}{W}$$

$$x = \frac{3a}{4}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos\alpha + 5\sin\alpha}{3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}\right)$$

4.6 බල තුනකට වඩා වැඩියෙන් ක්‍රියා කරන විට

දෘඪ වස්තුවක් මත ඒකතල බල තුනකට වඩා වැඩියෙන් ක්‍රියා කරන අවස්ථා සලකමු. එක ලක්ෂ්‍යයකදී බලයන් හමු වීම අවශ්‍ය නොවේ.

දෘඪ වස්තුවක් මත එක ම තලයේ ක්‍රියා කරන බලවලින් යුක්ත පද්ධතියක් තනි බලයකට හෝ G බල යුග්මයකට ඌනනය කළ හැකි ය.

R=0 නම් එහි කවර හෝ දිශාවකට බලවල සංරචකවල වීජ ඓක්‍යය ශූන්‍ය වේ.

එහෙත් $R^2 = X^2 + Y^2$, නිසා R=0 විට X = 0 හා Y = 0 වේ.
එකිනෙකට ලම්බක දිශා දෙකක් ඔස්සේ බලවල විභේදන සංරචකවල වීජ ඓක්‍යය ශූන්‍ය විය යුතුය. බල පිහිටා ඇති තලය මත කවර හෝ ලක්ෂ්‍යයක් වටා බලවල ඝූර්ණයන්ගේ විජ ඓක්‍ය ශූන්‍ය වේ.
සමතුලිතතාවට අවශ්‍යතාව එනම් සමතුලිතතා අවශ්‍යතාවය.

i එකිනෙකට සමාන්තර නොවන දිශා දෙකක් ඔස්සේ වුවද බලවල සංරචකවල වීජ ඓක්‍යය ශූන්‍ය වේ.

ii කවර ලක්ෂ්‍යයක් වටා වුව ද බලවල ඝූර්ණයන්ගේ වීජ ඓක්‍යය ශූන්‍ය වේ.

පළමු අවශ්‍යතාව මඟින් පද්ධතිය තනි බලයකට ඌනනය නොවන බවත් දෙවන අවශ්‍යතාව මඟින් පද්ධතිය බල යුග්මයකට ඌනනය නොවන බව තහවුරු කරයි.

වෙනත් තුල්‍ය අවශ්‍යතා

තලයක එක ම රේඛාවේ නොපිහිටන කවර හෝ ලක්ෂ්‍ය තුනක් වටා ඝූර්ණවල වීජීය ඓක්‍යය ශූන්‍ය වේ.

4.7 විසඳූ නිදසුන

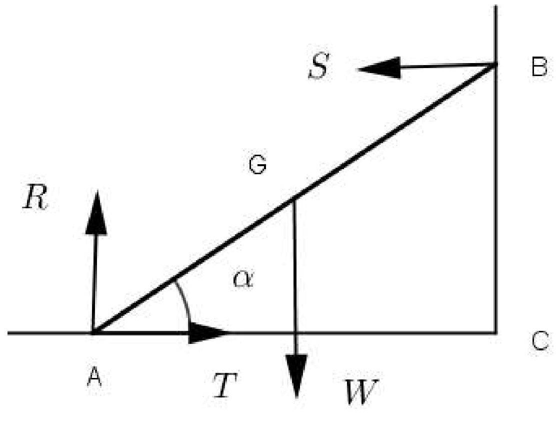
උදාහරණ 1

ඒකාකාර ඉණිමඟක් එහි එක් කෙළවරක් සුමට බිමක් මත ද අනෙක් කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද තිරසට α කෝණයකින් ආනත ව නිශ්චලතාවේ පවතී. පහළ කෙළවර බිත්තිය සහ බිම හමු වන ලක්‍ෂයට සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ ආතතිය සහ බිත්තියේ සහ බිමෙහි ප්‍රතික්‍රියාවන් සොයන්න.

ඉණිමගේ බරට සමාන බරකින් යුක්ත මිනිසකු ඉණිමගේ දිගෙන් හතරෙන් තුනක් දුර නැග ඇති විට තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

ඉණිමග මත ක්‍රියා කරන බල අතර

i බර W
ii තන්තුවේ ආතතිය T
iii පොළොවේ ප්‍රතික්‍රියාව R
iv බිත්තියේ ප්‍රතික්‍රියාව S



ඉනිමගේ සමතුලිතතාව සඳහා බල තිරස්ව විභේදනයෙන්

$$T - S = 0$$

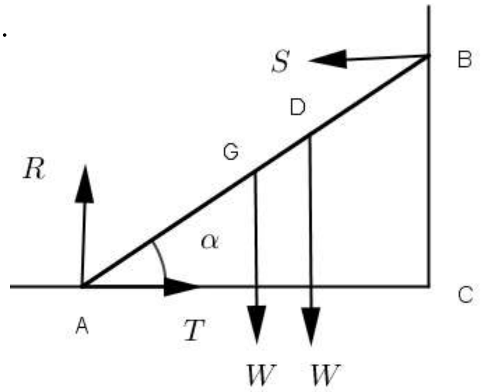
$$\rightarrow \quad T = S ....(1)$$

$\uparrow$ ඉනිමගේ සමතුලිතතාව සඳහා බල සිරස්ව විභේදනයෙන්

$$R - W = 0$$

$$R = W ....(2)$$

ඉනිමගේ දිග 2a ලෙස ගනිමු.



A ↺ වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$S \times 2a\sin\alpha - W \times a\cos\alpha = 0$$

$$S = \frac{W}{2}\cot\alpha, T = \frac{W}{2}\cot\alpha$$

මිනිසා ඉණිමඟ උඩ සිටින විට බල සිරසට විභේදනයෙන් $\uparrow$

$$R - 2W = 0$$

$$R = 2W$$

B ↺ වටා සූර්ණයෙන්

$$T \times 2a\sin\alpha - R \times 2a\cos\alpha + W \times a\cos\alpha + W \times \frac{a}{2}\cos\alpha = 0$$

$$2T\sin\alpha = 2 \times 2W\cos\alpha - \frac{3}{2}W\cos\alpha$$

$$T = \frac{5W\cos\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{5W}{4}\cot\alpha$$

උදාහරණ 2

බර W වන බාල්කයක් එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G මඟින් දිග a සහ b වන AC සහ BC කොටස් දෙකකට බෙදයි. බාල්කය සිරස් තලයක AD සුමට බිමක් මත සහ DB සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහි ව නිශ්චලතාවේ පවතී. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් Dට සහ බාල්කයේ P ලක්ෂ්‍යයට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ ආතතිය T නම් සහ බාල්කයේ සහ තන්තුවේ තිරසට ආනතිය පිළිවෙළින් θ, ϕ නම්

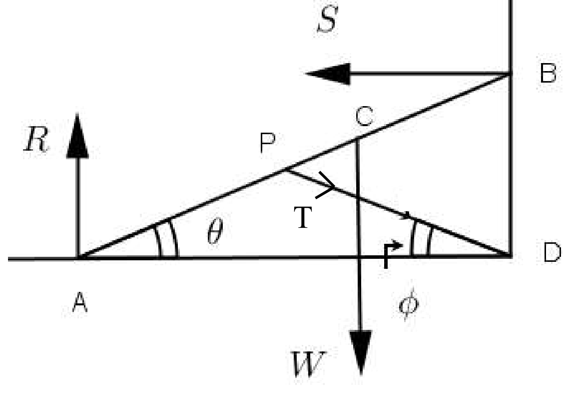
$$T = \frac{Wa\cos\theta}{(a+b)\sin(\theta - \phi)}$$

බව පෙන්වන්න. (තන්තුව හා බාල්කය බිත්තියක බිමට ලම්භ සිරස්තලයක පිහිටා ඇත.)

බාල්කයෙහි සමතුලිතතාව සඳහා බල තිරසට විභේදනයෙන්

$$\rightarrow T\cos\phi - S = 0$$

$$S = T\cos\phi$$



A ↺ වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$S \times AB\sin\theta - T \times AD\sin\phi - W \times a\cos\theta = 0$$

$$T\cos\phi(a+b)\sin\theta - T \times (a+b)\cos\theta\sin\phi = Wa\cos\theta$$

$$T(a+b)[\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi] = Wa\cos\theta$$

$$T(a+b)\sin(\theta - \phi) = W \times a\cos\theta$$

$$T = \frac{Wa\cos\theta}{(a+b)\sin(\theta - \phi)}$$

උදාහරණ 3

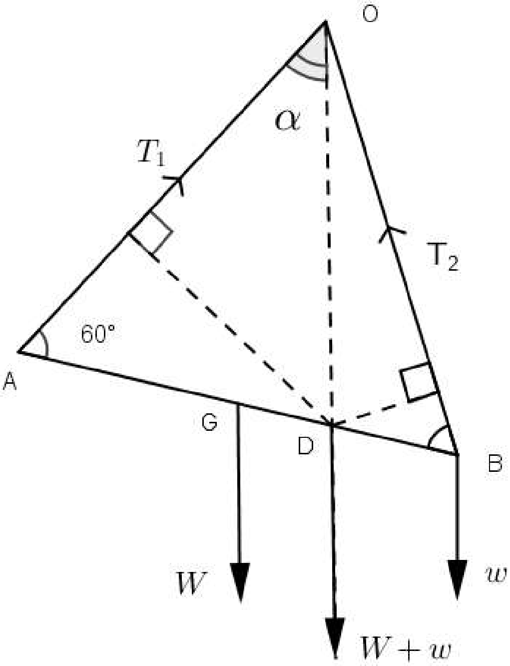
බර W වන AB ඒකාකාර දණ්ඩක B කෙළවරට w බරැති අංශුවක් සවි කර ඇත. දණ්ඩේ දිගට සමාන සැහැල්ලු OA සහ OB අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් දණ්ඩ සහ අංශුව O අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. සමතුලිතතාවිදී OA සහ OB තන්තුවල ආතති T_1 සහ T_2 නම්

(i) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{W}{W+2w}$

(ii) OA සිරස සමඟ සාදන කෝණය α නම් $\tan\alpha = \dfrac{(W+2w)\sqrt{3}}{3W+2w}$ වන බව ඔප්පු කරන්න.

ක්‍රියාකරන බලයන්
- * දණ්ඩේ බර W
- * අංශුවේ බර w
- * තන්තුවල ආතති T_1 සහ T_2

W සහ w සමාන්තර බලවල සම්ප්‍රයුක්ත බලය වන W+w හි ක්‍රියා රේඛාව O හරහා යන අතර දණ්ඩමත D ලක්ෂයේ දී ක්‍රියා කරයි.



$AB = 2a$ ලෙස ගනිමු. එවිට $GB = a$ වේ.

$$GD = \frac{w}{W+w}a$$

$$AD = a + \frac{wa}{W+w} = \left(\frac{W+2w}{W+w}\right)a$$ සහ

$$DB = a - \frac{wa}{W+w} = \frac{Wa}{W+w}$$

D වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

n $T_1 \times AD\sin 60 - T_2 \times DB \sin 60 = 0$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{DB}{AD} = \frac{Wa}{W+w} \times \frac{W+w}{(W+2w)a} = \frac{W}{W+2w}$$

OAD ත්‍රිකෝණයට සයින් නීතිය

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{OA}{\sin\left[180-(60+\alpha)\right]}$$

$$\frac{AD}{OA} = \frac{\sin\alpha}{\sin(60+\alpha)}$$

$$\frac{W+2w}{W+w} \times \frac{a}{2a} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha}$$

$$\frac{W+2w}{2(W+w)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\alpha+\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}\cot\alpha+1}$$

$$\frac{\sqrt{3}\cot\alpha+1}{2}=\frac{2(W+w)}{W+2w}$$

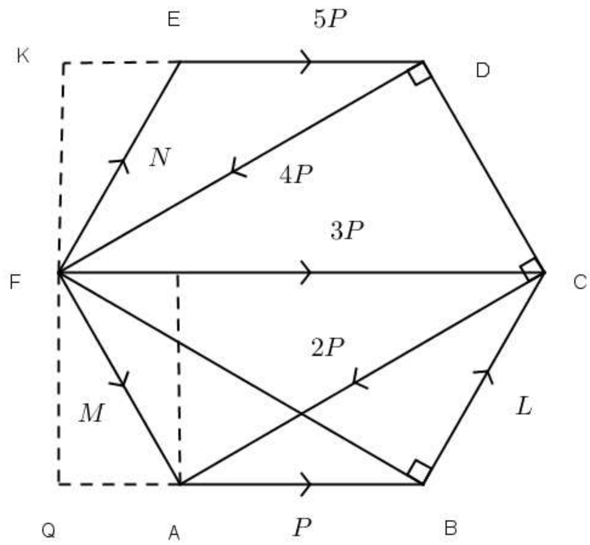
$$\sqrt{3}\cot\alpha=\frac{4W+4w}{W+2w}-1=\frac{3W+2w}{W+2w}$$

$$\cot\alpha=\left(\frac{3W+2w}{W+2w}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\alpha=\left(\frac{W+2w}{3W+2w}\right)\sqrt{3}$$

උදාහරණ 4

A,B,C,D,E,F ලක්ෂ්‍ය යනු පැත්තක දිග $2a$ වූ සවිධි ABCDEF ෂඩාස්‍රයක වාමාවර්තව ශීර්ෂ වේ. නිව්ටන් P,2P,3P,4P,5P,L,M,N විශාලත්වයන් සහිත බල AB,CA,FC,DF,ED,BC,FA සහ FE දිගේ අකුරුවලින් දැක්වෙන දිශාවන් ඔස්සේ පිළිවෙළින් ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී නම් L,M,N බල P ඇසුරෙන් සොයන්න.



බල සමතුලිතතාවේ ඇති බැවින් ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් වටා ඒවායේ ඝූර්ණවල එකතුව ශූන්‍ය වේ.

$FB \perp BC$
$FD \perp DC$

Fm වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$L\times FB-5P\times FK+P\times FQ-2P\times FA=0$$

$$L\times 4a\cos 30-5P\times 2a\sin 60+P\times 2a\sin 60-2P\times 2a=0$$

$$4L\times\frac{\sqrt{3}}{2}-10P\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2P\times\frac{\sqrt{3}}{2}-4P=0$$

$$2\sqrt{3}L-4\sqrt{3}P-4P=0$$

$$L=\frac{4P+4\sqrt{3}P}{2\sqrt{3}}$$

$$=2P\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)N$$

A mවටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$L\times 2a\cos 30-5P\times 4a\cos 30-N\times 2a\cos 30+4P\times 2a-3P\times 2a\cos 30=0$$

$$2L\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2N\times\frac{\sqrt{3}}{2}-26P\times\frac{\sqrt{3}}{2}+8P=0$$

$$L-N-13P+\frac{8P}{\sqrt{3}}=0$$

$$N=L-13P+\frac{8P}{\sqrt{3}}$$

$$=2P+\frac{2P}{\sqrt{3}}+\frac{8P}{\sqrt{3}}-13P$$

$$N=\left(\frac{10}{\sqrt{3}}-11\right)P$$

AB ට සමාන්තරව බල විභේදනයෙන්

$$\rightarrow L\cos 60+M\cos 60+N\cos 60+5P+3P+P-4P\cos 30-2P\cos 30=0$$

$$\frac{L}{2}+\frac{M}{2}+\frac{N}{2}+9P-4P\frac{\sqrt{3}}{2}-2P\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$L+M+N=6\sqrt{3}P-18P$$

$$M=6\sqrt{3}P-18P-\left(\frac{12P}{\sqrt{3}}-9P\right)$$

$$=2\sqrt{3}P-9P$$

$$=\left(2\sqrt{3}-9\right)P$$

එම නිසා

$$L=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)PN$$

$$M=\left(2\sqrt{3}-9\right)PN$$

$$N=\left(\frac{10}{\sqrt{3}}-11\right)PN$$

4.8 අභ්‍යාසය

(1) දිග l සහ බර $2w$ වන AB ඒකාකාර දණ්ඩක A කෙළෙවර සුමට ලෙස අචල ලක්ෂයකට අසව් කර B කෙළෙවරට යෙදූ තිරස් බලයක් මගින් සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ Aට පහළින් B පිහිටන පරිදි, A හරහා යන සිරස් රේඛාවේ සිට a දුරක් ඇතින් B පිහිටන පරිදිය A කෙළවර මත ප්‍රතික්‍රියාව $w\left[\dfrac{4l^2-3a^2}{l^2-a^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ බව පෙන්වන්න.

(2) දිග a වන ඒකාකාර දණ්ඩක් එහි එක් කෙළවරක් සුමට බිත්තියකට සුමටව අසව් කර දණ්ඩේ අනෙක් කෙළවර දිග l වන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකටත් තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර දණ්ඩ අසව්කල ලක්ෂයට ඉහළින් පිහිටි බිත්තියේ ලක්ෂ්‍යයටත් සම්බන්ධ කිරීමෙනි. දණ්ඩ සමතුලිත විට දණ්ඩ බිත්තිය සමග සාදන කෝණය θ නම් $\cos^2\theta=\dfrac{l^2-a^2}{3a^2}$ බව පෙන්වන්න. (දණ්ඩ සහ තන්තුව බිත්තියට ලම්භ සිරස් තලයක පිහිටා ඇත.)
සමතුලිතතාවය පැවතීමට $a:l$ අනුපාතයේ තිබිය යුතු සීමාව සොයන්න.

(3) බර W සහ අරය r වන ඒකාකාර සුමට ගෝලයක් සුමට බිත්තියක ගැටෙමින් සමතුලිතාවයේ ඇත්තේ l දිග ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් ගෝලයට සම්බන්ධ කර අනෙක් කෙළවර බිත්තියට සම්බන්ධ කිරීමෙනි. තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{W(l+r)}{\sqrt{l^2+2lr}}$ බව පෙන්වන්න. බිත්තිය හා ගෝලය අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(4) අඩ සිරස් කෝණය α වන උස h වන ඒකාකාර ඝන කේතුවක පාදය සුමට බිත්තියක ගැටෙමෙන් සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ කේතුවේ ශිර්ෂයට සහ බිත්තියේ ලක්ෂ්‍යකට සම්බන්ධ කරන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. තන්තුවට තිබිය හැකි උපරිම දිග $h\sqrt{1+\dfrac{16}{9}\tan^2\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

(5) ABC ඒකාකාර ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයක් BC දාරය සිරස්ව පිහිටන සේ O ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇත්තේ A හා B ශිර්ෂවලට සම්බන්ධ කරන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගිනි. AO සහ BO තන්තු සිරස සමග පිළිවෙළින් α සහ β කෝණ සාදයි නම් $2\cot\alpha-\cot\beta=3\cot\beta$ බව පෙන්වන්න.

(6) ඒකාකාර ඍජුකෝණාස්‍රාකාර ආස්තරයක් සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ එහි $2a$ සහ $2b$ පාද එකම තිරස් රේඛාවේ එකිනෙකට c දුරකින් පිහිටි පිහි තුඩු දෙකක් මත ගැටෙමිනි. $2a$ පාදය තිරස සමග θ කෝණයක් සාදයි නම් $c\cos2\theta=a\cos\theta-b\sin\theta$ බවද පෙන්වන්න. $2b$ පාදය තිරස සමග සාදන කෝණය $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{a^2-c^2}{c^2}\right)$ අපෝහනය කරන්න.

(7) බර W වන ඒකාකාර දණ්ඩක් සමතුලිතතාවයේ ඇත්තේ තිරසට α සහ β කෝණවලින් ආනතවන සුමට තල දෙකක් මත ගැටිමෙනි. මෙම තල දෙක තිරස් රේඛාවක් මගින් ඡේදනය වේ. තවද දණ්ඩ සිරස සමග θ කෝණයක් සාදයි නම් $2\cot\theta = \cot\beta - \cot\alpha$ බව පෙන්වන්න. දණ්ඩ මත තල මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.
(දණ්ඩ පිහිටි සිරස් තලය ආනත තල දෙකට ලම්භක වේ.)

(8) සුමට P කුඤ්ඤයක් සුමට සිරස් බිත්තියක සිට a දුරක් ඈතින් පවතින සේ අචල ලෙස සවිකර ඇත. දිග $6a$ සහ බර W වන AB ඒකාකාර දණ්ඩක් කුඤ්ඤයේ ගැටෙමින් සමතුලිතතාවයේ ඇත්තේ දණ්ඩේ A කෙළවර බිත්තියේ ගැටෙන පරිදිය. දණ්ඩ තිරස සමග සාදන කෝණය θ නම් දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන බල ත්‍රිකෝණය ඇඳ දක්වන්න. කුඤ්ඤය මගින් දණ්ඩමත ප්‍රතික්‍රියාව W සහ θ ඇසුරෙන් සොයන්න. $3\cos^3\theta = 1$ බව පෙන්වන්න.
(දණ්ඩ පිහිටි සිරස් තලය ආනත තල දෙකට ලම්භක වේ.)

(9) දිග a වන සිහින් දණ්ඩක් අරය a වන වලල්ලක සුමට ඇතුලත පෘෂ්ඨය මත ගැටෙමින් සමතුලිතතාවයේ ඇත. දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේදී දණ්ඩේ දිග 3:4 අනුපාතයට වෙන් කරයි. දණ්ඩ සිරස සමග සාදන කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$ බව පෙන්වන්න. දණ්ඩේ දෙකෙළවර මත වළල්ල මඟින් ඇතිවන ප්‍රතික්‍රියාවල අනුපාතය සොයන්න.

(10) අරය a වන සහ බර W වන සුමට ගෝල දෙකක් අරය $b\,(>2a)$ වන අචල සුමට පාත්‍රයක ඇතුළත පෘෂ්ඨයේ ස්පර්ශ වෙමින් සමතුලිතව පවතී. එක් එක් ගෝලය මත ක්‍රියාකරන බල සඳහා බල ත්‍රිකෝණය අඳින්න. ගෝල දෙක අතර ක්‍රියාකරන ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{Wa}{\sqrt{b(b-2a)}}$ බව පෙන්වන්න.

(11) බර W වන ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙළවරක් සුමට තිරස් බිත්තියක ගැටෙමින්ද අනෙක් කෙළවරට ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ගැට ගසා එම කෙළවර තිරසට θ කෝණයකින් ආනත සුමට තලයක් මත ගැටී ඇත. තන්තුව ආනත තලයේ ඉහළ ඇති කප්පියක් මතින් පන්නා P භාරයකට ගැට ගසා ඇත. P භාරය සිරසට පහළට එල්ලී ඇති අතර පද්ධතිය සමතුලිත නම් $2P = W\sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

(12) බර W වන ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙළවරක් අචල ලක්ෂ්‍යකට සුමටව සවිකර අනෙක් අන්තයේ P දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තරුවක් ගැටගසා තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර දණ්ඩ සවිකර ඇති ලක්ෂ්‍යයට c දුරක් සිරස්ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත. තන්තුව හා සම්බන්ධ දණ්ඩේ කෙළවරට දණ්ඩේ බරෙන් අඩකට සමාන භාරයක් ගැට ගසා ඇති විට සමතුලිත නම් තන්තුවේ ආනතිය $\dfrac{lW}{c}$ බව පෙන්වන්න.

(13) ABCDEF යනු සවිධි ෂඩාස්‍රයකි. විශාලත්වය P වන බල පහක් AE, ED, DC, CB, BA. ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. විශාලත්වය Q වන බල පහක් AC, CE, EB, BD, DA ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. මෙම බල දහය යටතේ පද්ධතිය සමතුලිත නම් P සහ Q අතර තිබිය යුතු අනුපාතය සොයන්න.